Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 10: POLYNOMICKÉ FUNKCIE

1. príklad (110/2)

Zadanie: Určte parameter $p \in R$ tak, aby rovnica $x^2 - px + p - 9 = 0$ mala dva korene, ktorých rozdiel je šesť.

Riešenie:

Korene, ktoré hľadáme si označíme x_1, x_2 $(x_1 > x_2)$. Pre tieto korene musí platiť, že:

$$(x - x_1)\cdot(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)\cdot x + x_1 x_2 = 0$$

Teraz je zo zadania zrejmé, že:

$$x_1 + x_2 = p$$

$$x_1 x_2 = p - 9$$

$$x_1 - x_2 = 6 \Rightarrow x_1 = 6 + x_2$$

Výsledok už teraz dostaneme jednoduchým dosadzovaním a úpravami:

$$x_1 x_2 = x_1 + x_2 - 9$$

$$(6 + x_2)\cdot x_2 = 6 + x_2 + x_2 - 9$$

$$6x_2 + x_2^2 = 2x_2 - 3$$

$$x_2^2 + 4x_2 + 3 = 0$$

$$(x_2 + 3)\cdot(x_2 + 1) = 0$$

$$x_2 = -3 \Rightarrow x_1 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{p = 0}}$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{p = 4}}$$

Rovnica $x^2 - px + p - 9 = 0$ má dva korene, ktorých rozdiel je šesť, ak $p = 0$ alebo $p = 4$.

2. príklad (110/11)

Zadanie: Načrtnite graf funkcie $f : y = x^5 - 7x^4 + 12x^3$.

Riešenie:

Definičný obor funkcie je $D(f) = R$, funkcia je spojitá.

Nulové body funkcie:

$f(x) = x^5 - 7x^4 + 12x^3 = x^3\cdot(x^2 - 7x + 12) = x^3(x-3)(x-4) \Rightarrow$ nulové body sú 0, 3, 4

Lokálne extrémy:

$f'(x) = 5x^4 - 28x^3 + 36x^2 = x^2\cdot(5x^2 - 28x + 36) = 5x^2(x-2)\left(x - \frac{18}{5}\right) \Rightarrow$ MLE sú 0; 3,6; 2

$$\begin{array}{ccccccc} + & & + & & - & & + \\ \hline & 0 & & 2 & & 3{,}6 & \end{array}$$

Lokálne maximum: $[2{,}16]$

Lokálne minimum: $[3{,}6; -11{,}197]$

Konvexnosť a konkávnosť, inflexné body:

$f''(x) = 20x^3 - 84x^2 + 72x = x\cdot(20x^2 - 84x + 72) = 20x(x-3)\left(x - \frac{6}{5}\right) \Rightarrow$ MIB sú 0; 3; 1,2

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & 0 & & 1{,}2 & & 3 & \end{array}$$

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 10: POLYNOMICKÉ FUNKCIE

Funkcia je konvexná na $\langle 0,2\rangle$ a na $\langle 3,\infty\rangle$

Funkcia je konkávna na $\langle -\infty,0\rangle$ a na $\langle 1,2;3\rangle$

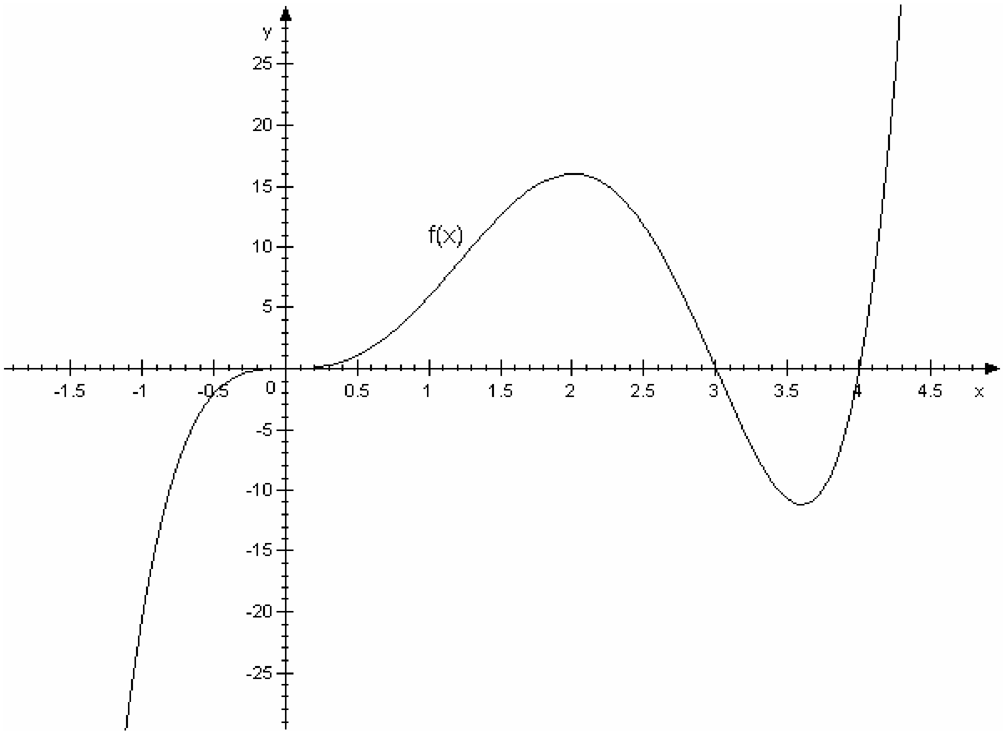
Inflexné body: $[0,0]$, $[1,2;8,70912]$, $[3,0]$

Asymptoty v $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Graf:



3. príklad (110/13)

Zadanie: V rovnici $x^3 + px + 2 = 0$ určte $p \in R$ tak, aby rovnica mala viacnásobný koreň a potom určte všetky jej korene.

Riešenie:

Keďže rovnica je tretieho stupňa, môžem mať maximálne trojnásobný koreň. Budeme teda uvažovať dve situácie – že má trojnásobný a že má dvojnásobný koreň:

a) Trojnásobný koreň x_1:

$$(x - x_1)^3 = 0$$

$$x^3 - 3x_1x^2 + 3x_1^2x - x_1^3 = 0$$

Keď porovnáme odvodenú rovnicu so zadanou, zistíme, že x_1 by malo byť rovné 0 (člen x^2 v zadanej rovnici nie je) a zároveň aj $-\sqrt[3]{2}$. Tento postup teda nevedie k vyriešeniu príkladu.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 10: POLYNOMICKÉ FUNKCIE

b) Dvojnásobný koreň x_1 a jednonásobný koreň x_2 :

$$(x-x_1)^2\cdot(x-x_2)=0$$
$$(x^2-2xx_1-x_1^2)^2\cdot(x-x_2)=0$$
$$x^3-2x^2x_1+xx_1^2-x^2x_2+2xx_1x_2-x_2x_1^2=0$$
$$x^3+(-2x_1-x_2)x^2+(2x_1x_2+x_1^2)x-x_2x_1^2=0$$

Keď teraz porovnáme rovnice, zistíme, že:

$$-2x_1-x_2=0\Rightarrow x_2=-2x_1$$
$$-x_2x_1^2=2\Rightarrow 2x_1^3=2\Rightarrow \underline{x_1=1}\Rightarrow \underline{x_2=-2}$$
$$p=2x_1x_2+x_1^2\Rightarrow \underline{\underline{p=-3}}$$

Rovnica $x^3+px+2=0$ má viacnásobný koreň, pokiaľ $p=-3$. Jej koreňmi sú potom dvojnásobný koreň 1 a jednonásobný koreň –2.

4. príklad (111/22)

Zadanie: Riešte v R rovnicu $4x^5+12x^4+11x^3+11x^2+12x+4=0$.

Riešenie:

Keďže táto recipročná rovnica je nepárneho stupňa, musíme najprv nájsť jeden jej koreň a dostať sa delením polynómov k recipročnej rovnici párneho stupňa. Koreňom recipročnej rovnice nepárneho stupňa je vždy 1 alebo –1. V našom prípade je to očividne $x_1=-1$. Teraz rovnicu vydelíme:

$$(4x^5+12x^4+11x^3+11x^2+12x+4):(x+1)=4x^4+8x^3+3x^2+8x+4$$

Vzniknutú rovnicu si najprv upravíme a potom použijeme tzv. Lagrangeovu substitúciu:

$$4x^4+8x^3+3x^2+8x+4=0$$
$$4x^2+8x+3+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}=0$$
$$4\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0 \qquad \left(y=x+\frac{1}{x}\right)$$
$$4\cdot(y^2-2)+8y+3=0$$
$$4y^2+8y-5=0$$
$$4\cdot\left(y-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(y+\frac{5}{2}\right)=0$$

Teraz už iba dopočítame x:

1.
$$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$$
$$2x^2+2=x$$
$$2x^2-x+2=0$$
$D<0\Rightarrow$ v R nie je riešenie

2.
$$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$$
$$2x^2+2=-5x$$
$$2x^2+5x+2=0$$
$$2\cdot(x+2)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$$

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 10: POLYNOMICKÉ FUNKCIE

Riešením rovnice teda je $K=\left\{-1,-2,-\frac{1}{2}\right\}$.

5. príklad (112/28)

Zadanie: Určte kubickú funkciu, ktorá má v bode $[4,6]$ lokálne maximum a v bode $[6,1]$ lokálne minimum.

Riešenie:

Všeobecne takúto kubickú funkciu môžeme zapísať takto: $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.

Jej prvá derivácia by potom bola: $f'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1$. Pre prvú deriváciu funkcie zároveň platí, že dáva nulovú hodnotu v bodoch 4 a 6 (sú v nich lokálne extrémy). Takže:

$$f'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1=k\cdot(x-4)\cdot(x-6)=kx^2-10kx+24k \Rightarrow 3a_3=k \quad \Rightarrow a_3=\tfrac{k}{3}$$

$$\Rightarrow 2a_2=-10k \Rightarrow a_2=-5k$$

$$\Rightarrow a_1=24k \quad \Rightarrow a_1=24k$$

Teraz ešte využijeme poznatok o funkčných hodnotách lokálnych extrémov funkcie:

$$f(4)=6=a_3\cdot 4^3+a_2\cdot 4^2+a_1\cdot 4+a_0$$

$$f(6)=1=a_3\cdot 6^3+a_2\cdot 6^2+a_1\cdot 6+a_0$$

Rovnice odčítame a dosadíme za áčka:

$$-5=152a_3+20a_2+2a_1$$

$$-5=152\cdot\frac{k}{3}+20\cdot(-5k)+2\cdot 24k$$

$$-5=\frac{4}{3}k$$

$$k=\frac{15}{4}$$

Dosadením dostávame:

$$\underline{a_3=\frac{k}{3}=\frac{5}{4}}$$

$$\underline{a_2=-5k=-\frac{75}{4}}$$

$$\underline{a_1=24k=90}$$

$$6=a_3\cdot 4^3+a_2\cdot 4^2+a_1\cdot 4+a_0$$

$$6=80-300+360+a_0$$

$$\underline{a_0=-134}$$

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 10: POLYNOMICKÉ FUNKCIE

Funkcia spĺňajúca podmienky je teda: $f(x) = \frac{5}{4}x^3 - \frac{75}{4}x^2 + 90x - 134$.