

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### *MATURITNÝ OKRUH 8: POSTUPNOSTI*

#### 1. príklad (92/Pr. 3)

Zadanie: V banke si zoberieme pôžičku  $k$  Sk. Mesačne splácame  $s$  Sk, pričom splácame aj mesačný úrok  $p\%$ . ( $p$  je dvanástina ročného úroku). Koľko mesiacov budeme pôžičku splácať?

Riešenie:

Nech  $a_n$  je obnos, ktorý ešte treba splatiť po  $n$  mesiacoch.

$$\text{Po prvom mesiaci: } a_1 = k - s + \frac{p}{100} \cdot k = k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s$$

$$\text{Po druhom mesiaci: } a_2 = a_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s = k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s$$

$$\text{Po treťom mesiaci: } a_3 = a_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s = k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s$$

Po  $n$ -tom mesiaci:

$$\begin{aligned} a_n &= k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2} - \dots - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s = \\ &= k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - s \cdot \left[ \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2} + \dots + \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1 \right] = \\ &= k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - s \cdot 1 \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}{\left(1 + \frac{p}{100}\right) - 1} = k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - \frac{100 \cdot s}{p} \cdot \left[ \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1 \right] = \\ &= \left( k - \frac{100 \cdot s}{p} \right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n + \frac{100 \cdot s}{p} \end{aligned}$$

Nech  $x$  je počet mesiacov, po ktorých bude pôžička splatená. Potom platí:

$$\begin{aligned} a_x = 0 &= \left( k - \frac{100 \cdot s}{p} \right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x + \frac{100 \cdot s}{p} \Rightarrow \frac{100 \cdot s}{p} = - \left( k - \frac{100 \cdot s}{p} \right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{100 \cdot s}{p} = \left( \frac{100 \cdot s - pk}{p} \right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \Rightarrow 100 \cdot s = (100 \cdot s - pk) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{100 \cdot s}{100 \cdot s - pk} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^x > 0 \Rightarrow \frac{100 \cdot s}{100 \cdot s - pk} > 0 \Rightarrow 100 \cdot s - pk > 0 \Rightarrow s > \frac{p \cdot k}{100} \quad (\text{iba pri takomto } s \text{ má zmysel - pri}$$

nižšom  $s$  nikdy pôžičku nesplátíme)

Ďalej upravujeme, aby sme vypočítali  $x$ :

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### **MATURITNÝ OKRUH 8: POSTUPNOSTI**

$$\frac{100 \cdot s}{100 \cdot s - pk} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \Rightarrow \ln \frac{100 \cdot s}{100 \cdot s - pk} = x \cdot \ln \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow x = \frac{\ln(100 \cdot s) - \ln(100 \cdot s - pk)}{\ln \left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

Pôžičku splatíme o  $\frac{\ln(100 \cdot s) - \ln(100 \cdot s - pk)}{\ln \left(1 + \frac{p}{100}\right)}$  mesiacov za predpokladu, že  $s > \frac{p \cdot k}{100}$ .

### **2. príklad (94/8)**

**Zadanie:** Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka tvoria tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Určte ich veľkosť, ak viete, že polomer kružnice vpísanej do trojuholníka je 7 cm.

**Riešenie:**

Z obrázku vyplýva, že  $a = x + 7$ ,  $b = y + 7$  a  $c = x + y$ .

Keďže dĺžky strán trojuholníka tvoria tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti s diferenciou  $d$ , platí:  $b - a = d = c - b \Rightarrow (y + 7) - (x + 7) = (x + y) - (y + 7) \Rightarrow y - x = x - 7 \Rightarrow \underline{y = 2x - 7}$ .

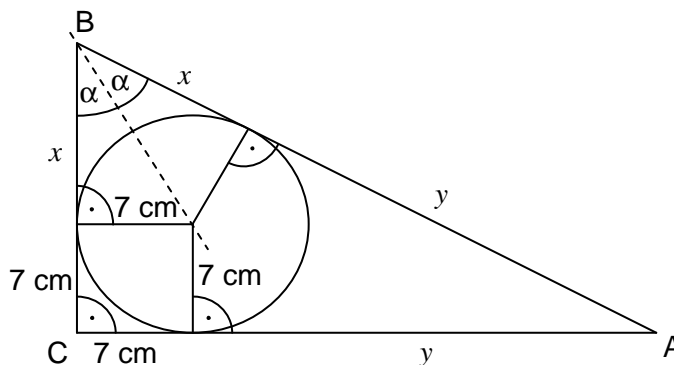
Dosadením do Pytagorovej vety dostávame:

$$\begin{aligned} (x + 7)^2 + (2x - 7 + 7)^2 &= (x + 2x - 7)^2 \Rightarrow x^2 + 14x + 49 + 4x^2 = 9x^2 - 21x - 21x + 49 \Rightarrow \\ \Rightarrow 5x^2 + 14x + 49 &= 9x^2 - 42x + 49 \Rightarrow 4x^2 - 56x = 0 \Rightarrow 4x \cdot (x - 14) = 0 \Rightarrow \underline{x = 0 \vee x = 14} \end{aligned}$$

Pre  $x = 0$  je  $c = -7$ , čo je očividný nezmysel, a preto zostáva iba jedno riešenie:

$$\underline{a = 14 + 7 = 21}, \underline{b = 28 - 7 + 7 = 28} \text{ a } \underline{c = 14 + 28 - 7 = 35}.$$

Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka s polomerom vpísanej kružnice 7 cm, ktoré tvoria aritmetickú postupnosť sú 21 cm, 28 cm a 35 cm.



### **3. príklad (94/12)**

**Zadanie:** V aritmetickej postupnosti je  $a_2 + a_4 = 24$  a  $a_3 : a_7 = 3 : 8$ . Určte  $a_{15}$ .

**Riešenie:**

Nech  $d$  je diferenciac danej postupnosti. Potom platí :

$$24 = a_2 + a_4 = a_1 + d + a_1 + 3d = 2 \cdot (a_1 + 2d) \Rightarrow a_1 + 2d = 12 \Rightarrow \underline{a_3 = 12}$$

$$a_7 = \frac{8}{3} \cdot 12 = 32$$

$$d = \frac{a_7 - a_3}{4} = 5$$

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### *MATURITNÝ OKRUH 8: POSTUPNOSTI*

$$\underline{a_{15}} = a_7 + 8d = 32 + 40 = \underline{72}$$

#### 4. príklad (95/17)

Zadanie: Dokážte, že postupnosť  $\left\{ \sqrt{\log(n^2 + 1) - \log(n + 1)} \right\}_{n=1}^{\infty}$  je rastúca.

Dôkaz (priamy):

pozn.: Dôkaz prevedieme tak, že budeme z dokazovaného tvrdenia odvádzať ďalšie tvrdenia, až pridáme k zrejmemu tvrdeniu. Potom celú úvahu „otočíme“ a dostávame dôkaz dokazovaného tvrdenia. Pri takýchto dôkazoch si musíme dávať pozor, aby všetky úpravy dokazovaného tvrdenia boli bez problémov „obrátilné“. Tu bude dôkaz zapísaný rovno s ekvivalenciami – pri robení takýchto dôkazov píšeme najprv píšeme iba implikácie v smere úvahy a potom overujeme ich „obrátilnosť“ a dopisujeme ekvivalencie. Dík za pozornosť.

$$\left\{ \sqrt{\log(n^2 + 1) - \log(n + 1)} \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ je rastúca} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \sqrt{\log((n+1)^2 + 1) - \log(n+2)} > \sqrt{\log(n^2 + 1) - \log(n+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \log((n+1)^2 + 1) - \log(n+2) > \log(n^2 + 1) - \log(n+1) \Leftrightarrow$$

pom. tvrdenie

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \log(n^2 + 2n + 2) + \log(n+1) > \log(n^2 + 1) + \log(n+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \log((n^2 + 2n + 2) \cdot (n+1)) > \log((n^2 + 1) \cdot (n+2)) \Leftrightarrow$$

$\log x$  je rast.

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; n^3 + 2n^2 + 2n + n^2 + 2n + 2 > n^3 + n + 2n^2 + 2 \Leftrightarrow$$

$\log x$  je rast.

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; n^2 + 3n > 0, \text{ čo je zrejmé tvrdenie} \Rightarrow \text{dôkaz je dokončený.}$$

Pomocné tvrdenie:

Aby sme mohli zapísať spätnú implikáciu pri ekvivalencii s nápisom „pom. tvrdenie“, musíme najskôr dokázať, že obe strany nerovnice sú kladné (aby sa dali odmocniť). Keďže ľavá strana je

$$\text{väčšia než pravá, stačí, aby sme dokázali, že } \forall n \in \mathbb{N}; \log(n^2 + 1) - \log(n + 1) = \log\left(n - \frac{n-1}{n+1}\right) \geq 0.$$

Dôkaz (priamy):

$$\text{Ak } n = 1 \Rightarrow \log(n^2 + 1) - \log(n + 1) = \log 2 - \log 2 = 0 \geq 0$$

$$\text{Ak } n \in \mathbb{N} - \{1\} \Rightarrow \log(n^2 + 1) - \log(n + 1) = \log\left(\frac{n^2 + 1}{n + 1}\right) = \log\left(n - \frac{n-1}{n+1}\right)$$

Keďže platí  $\forall x \in \mathbb{N}; \frac{x-1}{x+1} \in (0,1)$  a funkcia  $y = \log x$  je rastúca, platí aj:

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{1\}; \log\left(n - \frac{n-1}{n+1}\right) > \log(n-1) \geq 0$$

#### 5. príklad (95/21)

Zadanie: Počas premeny rádioaktívnej látky je čas, za ktorý sa polovica jej pôvodného množstva premení na rozpadové produkty. Aký vek má archeologický nález, ak sa v spoločnej vrstve s ním našlo 2,1 g rádioaktívneho uhlíka s polčasom premeny 5570 rokov a 300 g rozpadových produktov? (Úbytok hmotnosti spôsobený žiarením pri premene zanedbajte.)

Riešenie:

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### *MATURITNÝ OKRUH 8: POSTUPNOSTI*

$$T = 5570 \text{ r.}$$

$$m_0 = 302,1 \text{ g}$$

$$m(t) = 2,1 \text{ g}$$

$$t = ?$$

$m(t)$  – hmotnosť po  $t$  rokoch

$$m(T) = \frac{1}{2} \cdot m_0$$

$$m(2T) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot m_0$$

$$m(3T) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot m_0$$

$$m(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \cdot m_0 \Rightarrow \frac{m(t)}{m_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow \log \frac{m(t)}{m_0} = \frac{t}{T} \cdot \log \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{T \cdot (\log m(t) - \log m_0)}{\log 1 - \log 2} = \frac{T}{\log 2} \cdot (\log m_0 - \log m(t)) = \frac{5570}{\log 2} \cdot (\log 302,1 - \log 2,1) = \underline{\underline{39900 \text{ r.}}}$$

Archeologický nález je približne 39900 rokov starý.