Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 26: STEREOMETRIA

1. príklad (275/Pr. 1)

Zadanie: Daná je kocka $ABCDEFGH$ s hranou dĺžky a. Vypočítajte vzdialenosť priamok $\overleftrightarrow{BG}$ a $\overleftrightarrow{HF}$.

Riešenie:

Priamky $\overleftrightarrow{BG}$ a $\overleftrightarrow{HF}$ sú mimobežky, teda ich vzdialenosť je veľkosť ich najkratšej priečky. Jej konštrukcia nie je jednoduchá, a preto vzdialenosť určíme ako vzdialenosť dvoch navzájom rovnobežných rovín preložených priamkami. Sú to roviny $\overleftrightarrow{AFH}$ a $\overleftrightarrow{BGD}$. Najskôr dokážeme, že $\overleftrightarrow{EC}$ je kolmá na obe roviny:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\overleftrightarrow{AF}\perp\overleftrightarrow{AD}\Rightarrow\overleftrightarrow{AF}\perp\overleftrightarrow{BC}\\ \overleftrightarrow{AF}\perp\overleftrightarrow{EB}\end{array}\right\}\Rightarrow\overleftrightarrow{AF}\perp\overleftrightarrow{EBC}\Rightarrow\overleftrightarrow{AF}\perp\overleftrightarrow{EC}\\ \left.\begin{array}{r}\overleftrightarrow{AH}\perp\overleftrightarrow{AB}\Rightarrow\overleftrightarrow{AH}\perp\overleftrightarrow{CD}\\ \overleftrightarrow{AH}\perp\overleftrightarrow{ED}\end{array}\right\}\Rightarrow\overleftrightarrow{AH}\perp\overleftrightarrow{ECD}\Rightarrow\overleftrightarrow{AH}\perp\overleftrightarrow{EC}\end{array}\right\}\Rightarrow\underline{\overleftrightarrow{EC}\perp\overleftrightarrow{AFH}}\\ \hfill\overleftrightarrow{DBG}\parallel\overleftrightarrow{AFH}\end{array}\right\}\Rightarrow\underline{\overleftrightarrow{EC}\perp\overleftrightarrow{DBG}}$$

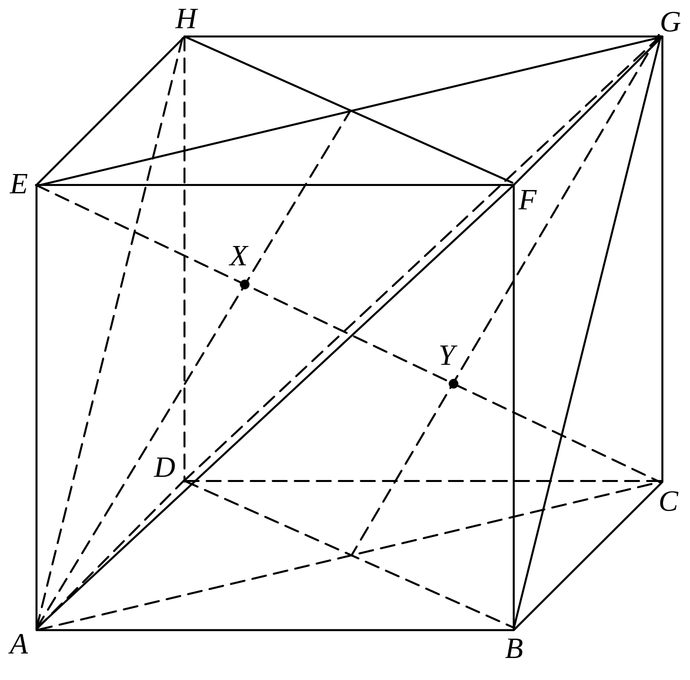
Označme si prienikové body priamky $\overleftrightarrow{EC}$ s rovinami $\overleftrightarrow{AFH}$ a $\overleftrightarrow{BGD}$ ako body X, Y. Teraz ešte dokážeme, že roviny $\overleftrightarrow{AFH}$ a $\overleftrightarrow{BGD}$ delia $\overleftrightarrow{EC}$ na tretiny. Objem štvorstena $AFHE$ môžeme vyjadriť dvoma spôsobmi:

$$\left.\begin{array}{r}V_{AFHE}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta EFH}\cdot|AE|=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot a=\frac{a^3}{6}\\ V_{AFHE}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta AFH}\cdot|EX|=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{2}\cdot|EX|=\frac{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{\frac{3}{2}}}{6}\cdot|EX|=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\cdot|EX|\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underline{|EX|=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}}$$

Keďže $|EC|=\sqrt{|EA|^2+|AC|^2}=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{3}$, tak $|EX|$ je naozaj tretinou $|EC|$.

Obdobne sa dá dokázať, že $|YC|=\frac{1}{3}\cdot|EC|$ (použijeme obdobné vzťahy pre štvorsten $BCDG$). Vzdialenosť rovnobežných rovín $\overleftrightarrow{AFH}$ a $\overleftrightarrow{BGD}$ je teda dĺžka úsečky XY, a to je tretina dĺžky telesovej uhlopriečky. Preto aj vzdialenosť mimobežiek $\overleftrightarrow{BG}$ a $\overleftrightarrow{HF}$ je $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Zdroj: http://www.zones.sk

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

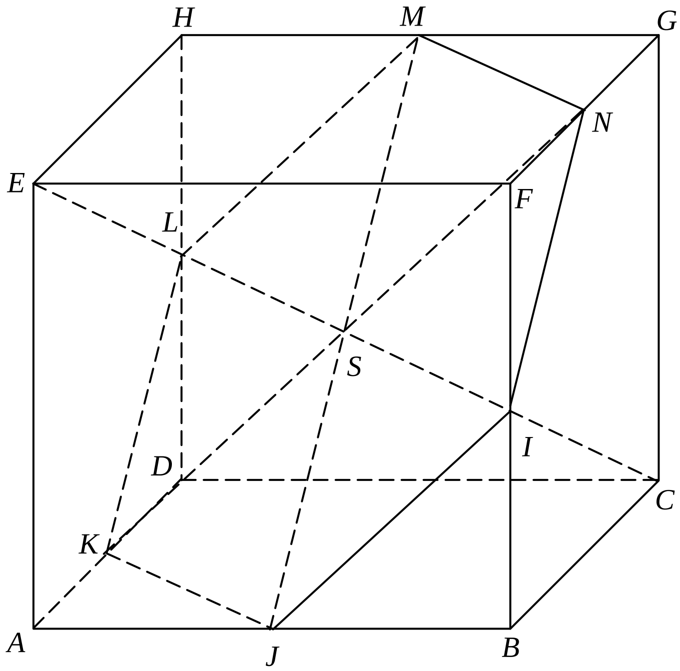
MATURITNÝ OKRUH 26: STEREOMETRIA

2. príklad (277/Pr. 3)

Zadanie: Zostrojte rez kocky rovinou súmernosti jej telesovej uhlopriečky. Dokážte, že rez je pravidelný šesťuholník.

Riešenie:

Máme zostrojiť rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou, ktorá je kolmá na telesovú uhlopriečku (napr. $\overleftrightarrow{EC}$) a prechádza jej stredom S. Označme si I stred úsečky BF, J stred úsečky AB, K stred úsečky AD, L stred úsečky DH, M stred úsečky HG, N stred úsečky FG.



Vieme, že roviny $\overleftrightarrow{AFH}$ a $\overleftrightarrow{BGD}$ sú kolmé na $\overleftrightarrow{EC}$ (viď 1. príklad). Keďže $\overleftrightarrow{EC} \perp \overleftrightarrow{HF} \Rightarrow \overleftrightarrow{EC} \perp \overleftrightarrow{LI}$ $\left(\overleftrightarrow{LI} \parallel \overleftrightarrow{HF}\right)$. $\overleftrightarrow{LI}$ je teda priamka roviny súmernosti, pretože je kolmá na $\overleftrightarrow{EC}$ a S leží na $\overleftrightarrow{LI}$. Rezová rovina je rovnobežná s rovinami $\overleftrightarrow{AFH}$ aj s $\overleftrightarrow{BGD}$, preto hrany rezu budú rovnobežné so stenovými uhlopriečkami kocky.

Rez je teda šesťuholník $IJKLMN$, ktorý má všetky strany zhodné (sú to polovice stenových uhlopriečok). To však ešte nestačí na to, aby bol šesťuholník pravidelný. Ešte treba dokázať, že všetky jeho uhlopriečky prechádzajúce stredom sú zhodné. Lenže všetky tieto uhlopriečky majú veľkosť stenovej uhlopriečky kocky, teda sú zhodné a rezový šesťuholník je pravidelný.

3. príklad (279/5)

Zadanie: Pravidelný n – boký ihlan má výšku v a veľkosť podstavnej hrany a. Vypočítajte veľkosť uhla φ bočnej steny a podstavy.

Riešenie:

Označme si S stred podstavy ihlana, V jeho vrchol, A_1, A_2 nejaké dva susedné vrcholy podstavy ihlana a O stred úsečky A_1A_2. Potom platí $\varphi = \angle \overleftrightarrow{A_1A_2V}, \overleftrightarrow{A_1A_2S}$. Nájdime rovinu, ktorá je kolmá na obe roviny $\overleftrightarrow{A_1A_2V}$ a $\overleftrightarrow{A_1A_2S}$:

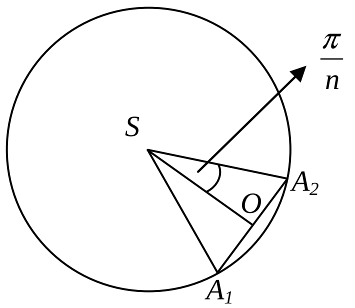
$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{SO} \perp \overleftrightarrow{A_1A_2} \\ \overleftrightarrow{VO} \perp \overleftrightarrow{A_1A_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{VSO} \perp \overleftrightarrow{A_1A_2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overleftrightarrow{VSO} \perp \overleftrightarrow{A_1A_2S} \\ \overleftrightarrow{VSO} \perp \overleftrightarrow{A_1A_2V} \end{array}\right\} \Rightarrow \rho = \overleftrightarrow{VSO}$$

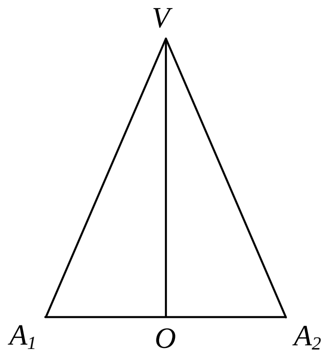
Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 26: STEREOMETRIA

Platí teda, že $\varphi = \left|\angle\left(\rho \cap \overleftrightarrow{A_1A_2V}, \rho \cap \overleftrightarrow{A_1A_2S}\right)\right| = \left|\angle \overleftrightarrow{VO}, \overleftrightarrow{SO}\right| = \left|\angle VOS\right|$, čiže $\operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{|SO|} = \frac{v}{\frac{|OA_1|}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}} = \underline{\underline{\frac{v \cdot 2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{a}}}$

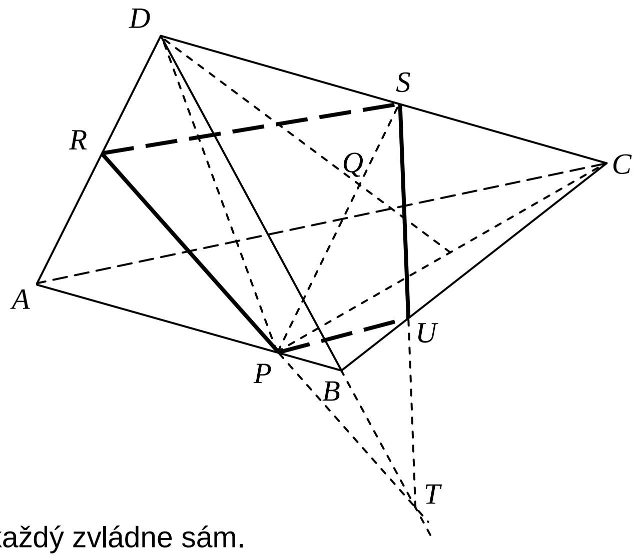




4. príklad (279/7)

Zadanie: Zostrojte rez štvorstena $ABCD$ rovinou $\overleftrightarrow{PQR}$, ak P je vnútri hrany AB, R je vnútri AD a Q je vnútri trojuholníka PCD.

Riešenie:



Postup:

1. $P, R \in$ stene $ABD \ldots$ úsečka PR
2. $\overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{S\}$
   $R, S \in$ stene $ACD \ldots$ úsečka RS
3. $\overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{BCD} = \left(\overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{ABD}\right) \cap \overleftrightarrow{BCD} =$
   $= \overleftrightarrow{PR} \cap \left(\overleftrightarrow{ABD} \cap \overleftrightarrow{BCD}\right) = \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{T\}$
4. $\overleftrightarrow{ST} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{U\}$
   $S, U \in$ stene $BCD \ldots$ úsečka SU
   $P, U \in$ stene $ABC \ldots$ úsečka PU

Rezom je štvoruholník $RPUS$.
pozn.: Obkec by mal byť obšírnejší, ale to snáď každý zvládne sám.

5. príklad (279/9)

Zadanie: Dva zhodné štvorce, ktoré ležia v dvoch rôznych rovinách, majú spoločnú hranu AD. Uhol ich rovín je α. Zo spoločného vrcholu A zostrojíme v oboch štvorcoch uhlopriečky. Vypočítajte ich uhol φ.

Riešenie:

Označme si dané štvorce $ABCD$ a $AKLD$. Potom platí $\varphi = |\angle CAL|$ a $|\angle CDL| = \alpha$. Z kosínusových viet v ΔCAL a ΔCDL si vyjadríme $|CL|^2$:

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 26: STEREOMETRIA

$$\left.\begin{aligned} |CL|^2 &= |CA|^2 + |AL|^2 - 2\cdot|CA|\cdot|CL|\cdot\cos\varphi = 2a^2 + 2a^2 - 2a\sqrt{2}a\sqrt{2}\cos\varphi = 4a^2 - 4a^2\cos\varphi \\ |CL|^2 &= |CD|^2 + |DL|^2 - 2\cdot|CD|\cdot|DL|\cdot\cos\alpha = a^2 + a^2 - 2aa\cos\alpha = 2a^2 - 2a^2\cos\alpha \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 4a^2\cos\varphi = 2a^2 - 2a^2\cos\alpha \Rightarrow 2 - 2\cos\varphi = 1 - \cos\alpha \Rightarrow \underline{\underline{\cos\varphi = \frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$