

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 4: TEÓRIA ČÍSEL

1. príklad (43/Pr. 1)

Zadanie: Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.

Dôkaz (sporom):

Predpokladajme, že by prvočísel bolo konečne veľa a označme ich p_1, p_2, \dots, p_k . Utvoríme číslo $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$. Keďže zrejme $P > p_i (i \in \{1, 2, \dots, k\})$, nemôže byť (podľa predpokladu) prvočísom. Musí teda byť zloženým číslom, a teda deliteľné nejakým prvočísom. Číslo P však nemôže byť deliteľné žiadnym z čísel $p_i (i \in \{1, 2, \dots, k\})$, pretože pri delení každým dáva zvyšok 1. To je spor, a teda predpoklad, že prvočísel je len konečne veľa, bol nesprávny a platí pôvodný výrok ČBTD.

2. príklad (46/4)

Zadanie: Nájdite prirodzené číslo n také, že súčin všetkých jeho deliteľov sa rovná

- a) $3^{30} \cdot 5^{40}$
- b) 5832

Riešenie:

- a) Urobíme si tabuľku všetkých deliteľov čísla $n = 3^x \cdot 5^y$:

	3^0	3^1	3^2	...	3^x
5^0	$3^0 \cdot 5^0$	$3^1 \cdot 5^0$	$3^2 \cdot 5^0$...	$3^x \cdot 5^0$
5^1	$3^0 \cdot 5^1$	$3^1 \cdot 5^1$	$3^2 \cdot 5^1$...	$3^x \cdot 5^1$
5^2	$3^0 \cdot 5^2$	$3^1 \cdot 5^2$	$3^2 \cdot 5^2$...	$3^x \cdot 5^2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
5^y	$3^0 \cdot 5^y$	$3^1 \cdot 5^y$	$3^2 \cdot 5^y$...	$3^x \cdot 5^y$

Teraz vypísané delitele vynásobíme. Začneme s prvým riadkom tabuľky:

$$(5^0)^{x+1} \cdot (3^0 \cdot 3^1 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot 3^x) = (5^0)^{x+1} \cdot 3^{\frac{x(x+1)}{2}}$$

Obdobne vynásobíme členy druhého, tretieho a posledného riadku:

$$2. \text{ riadok: } (5^1)^{x+1} \cdot 3^{\frac{x(x+1)}{2}}$$

$$3. \text{ riadok: } (5^2)^{x+1} \cdot 3^{\frac{x(x+1)}{2}}$$

\vdots

$$\text{posledný riadok: } (5^y)^{x+1} \cdot 3^{\frac{x(x+1)}{2}}$$

Teraz ešte vynásobíme všetky riadky a získame tak súčin všetkých deliteľov čísla n :

$$\left[3^{\frac{x(x+1)}{2}} \right]^{y+1} \cdot (5^0 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot 5^y)^{x+1} = 3^{\frac{x(x+1)(y+1)}{2}} \cdot 5^{\frac{y(y+1)(x+1)}{2}} = 3^{30} \cdot 5^{40}$$

Zostáva doriešiť sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych, ktorá nám zostala:

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 4: TEÓRIA ČÍSEL

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x \cdot (x+1) \cdot (y+1)}{2} = 30 \\ \frac{y \cdot (y+1) \cdot (x+1)}{2} = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \rightarrow \underline{\underline{x=3}} \\ \underline{\underline{y=4}}$$

Číslo spĺňajúce vyžadovanú podmienku je $n = 3^3 \cdot 5^4 = \underline{\underline{16875}}$.

- b) Najprv musíme rozložiť daný súčin deliteľov na súčin prvočísel: $5832 = 2^3 \cdot 3^6$
Obdobným postupom ako v prípade a) dostávame novú sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x \cdot (x+1) \cdot (y+1)}{2} = 3 \\ \frac{y \cdot (y+1) \cdot (x+1)}{2} = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \rightarrow \underline{\underline{x=1}} \\ \underline{\underline{y=2}}$$

Výsledné číslo je teda $n = 2^1 \cdot 3^2 = \underline{\underline{18}}$

3. príklad (46/14)

Zadanie: Dokážte, že $\forall n \in \mathbb{N}; 36 \mid (2n^6 - n^4 - n^2)$

Dôkaz (priamy):

Najprv si upravíme zadaný výraz a označíme ho k :

$$k = 2n^6 - n^4 - n^2 = n^2(2n^4 - n^2 - 1) = n^2(n^2 - 1)(2n^2 + 1) = n^2(n-1)(n+1)(2n^2 + 1)$$

Teraz dokážeme, že výraz je deliteľný 4 aj 9, a teda aj 36.

Deliteľnosť 4:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists l \in \mathbb{N}; \left. \begin{array}{l} n = 2l \Rightarrow n^2 = 4l^2 \Rightarrow 4 \mid n^2 \Rightarrow 4 \mid k \\ n = 2l - 1 \Rightarrow (n+1)(n-1) = 2l \cdot (2l-2) = 4l \cdot (l-1) \Rightarrow 4 \mid ((n+1)(n-1)) \Rightarrow 4 \mid k \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \mid k$$

Deliteľnosť 9:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists l \in \mathbb{N}; \left. \begin{array}{l} n = 3l \Rightarrow n^2 = 9l^2 \Rightarrow 9 \mid n^2 \Rightarrow 9 \mid k \\ n = 3l - 1 \Rightarrow (n+1)(2n^2 + 1) = 3l \cdot [2 \cdot (9l^2 - 6l + 1) + 1] = 9l \cdot (6l^2 - 4l + 1) \Rightarrow 9 \mid k \\ n = 3l - 2 \Rightarrow (n-1)(2n^2 + 1) = (3l-3) \cdot [2 \cdot (9l^2 - 12l + 4) + 1] = 9(l-1) \cdot (6l^2 - 8l + 3) \Rightarrow 9 \mid k \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow 9 \mid k$$

$$(4 \mid k \wedge 9 \mid k) \Rightarrow 36 \mid k \quad \text{ČBTD.}$$

4. príklad (46/17)

Zadanie: Koľko celočíselných riešení $[x, y]$ takých, že $|x| < 100$ a $|y| < 100$ má rovnica $(x-y)^2 = x+y$?

Riešenie:

Musí nastať jeden z troch prípadov:

1. $x = y \Rightarrow 0 = x + x \Rightarrow \underline{\underline{x=0}} \Rightarrow \underline{\underline{y=0}}$

2. $x < y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}; y = k + x \Rightarrow (x - k - x)^2 = x + k + x \Rightarrow k^2 = 2x + k \Rightarrow x = \frac{k(k-1)}{2} \Rightarrow y = \frac{k(k+1)}{2}$

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 4: TEÓRIA ČÍSEL

3. $x > y$ – symetrické riešenie ako v 2.

Z prvého prípadu dostávame jedno riešenie. Teraz zistíme, koľko je riešení v druhom prípade:

k	1	2	3	...	13	14
x	0	1	3	...	78	91
y	1	3	6	...	91	105

Z tabuľky vidieť, že existuje 13 riešení (pri $k = 14$ je už $|y| > 100$). Dohromady je teda 27 riešení (jedno z prvého prípadu, 13 z druhého prípadu a 13 z tretieho prípadu).

5. príklad (47/20)

Zadanie: Nájdite všetky riešenia rovnice $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$ v obore nezáporných celých čísel.

Riešenie:

Najprv rovnicu trochu upravíme:

$$(1+x) + x^2(1+x) = 2^y$$

$$(x+1)(x^2+1) = 2^y$$

Môže nastať jeden z troch prípadov:

1. $x = 0 \Rightarrow 1 = 2^y \Rightarrow y = 0 \Rightarrow [0, 0] \in K$

2. $x \in \mathbb{N} \wedge x$ je párne \Rightarrow nepárne \cdot nepárne $= 2^y \Rightarrow \nexists y$

3. $x \in \mathbb{N} \wedge x$ je nepárne $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}; x = 2n - 1 \Rightarrow 2n \cdot (4n^2 - 4n + 1 + 1) = 2^y \Rightarrow n \cdot (2n^2 - 2n + 1) = 2^{y-2}$

Keďže číslo $2n^2 - 2n + 1$ je nepárne, musí byť rovné 1 (inak nedostaneme po roznásobení mocninu dvojky):

$$2n^2 - 2n + 1 = 1$$

$$2n \cdot (n - 1) = 0$$

Keďže $n \in \mathbb{N}$, tak: $n = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 = 2^{y-2} \Rightarrow y = 2$

Rovnica má dve riešenia: $K = \{[0, 0], [1, 2]\}$.