Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 17: TEÓRIA GRAFOV

1. príklad (188/Pr. 3)

Zadanie: Aký môže byť maximálny počet vrcholov konvexného mnohostena, ktorého všetky steny sú trojuholníkmi a stupeň každého vrcholu je menší ako 6?

Riešenie:

Označíme v počet vrcholov mnohostena, h počet jeho hrán a s počet jeho stien. Podľa Eulerovej vety pre mnohosteny musí platiť $s+v=h+2$, odkiaľ $v=h+2-s$.
Keďže každá stena má byť trojuholníkom, platí, že na jednu stenu pripadajú tri hrany, z ktorých každá patrí obvodu práve dvoch stien. Platí teda $h=\frac{3}{2}s \Rightarrow s=\frac{2}{3}h$. Po dosadení do predchádzajúceho vzťahu dostávame $v=h+2-\frac{2h}{3}=\frac{h}{3}+2$.

Keď označíme stupne vrcholov mnohostena postupne $s_1, s_2, \ldots, s_v$, máme podľa zadania $s_i \leq 5 \quad (i \in \{1,2,\ldots,v\})$. V každom mnohostene platí $s_1+s_2+\ldots+s_v=2h$, odkiaľ dostávame pre náš mnohosten nerovnosť $2h \leq 5v$, teda $v \geq \frac{2}{5}h$.

Skombinovaním doterajších poznatkov dostávame nerovnosť pre $h: \frac{h}{3}+2=v\geq\frac{2}{5}h \Rightarrow h\leq 30$. Teda $v\leq\frac{30}{3}+2=12$ (mnohostenom požadovaných vlastností s 12 vrcholmi je napríklad pravidelný dvadsaťsten (ikosaéder)).
Mnohosten požadovaných vlastností môže mať najviac 12 vrcholov.

2. príklad (189/5)

Zadanie: Nech G_1, G_2 sú navzájom komplementárne grafy. Ak má G_1 aspoň dva komponenty súvislosti, tak je G_2 súvislý. Dokážte.
Poznámka: Hovoríme, že grafy G, H sú komplementárne, ak majú tú istú množinu vrcholov a platí: Vrcholy u, v sú spojené hranou v grafe G práve vtedy, ak nie sú spojené v H.

Dôkaz (priamy):

Nech G_1, G_2 sú navzájom komplementárne grafy. Ak graf G_1 má aspoň dva komponenty súvislosti $\Rightarrow$ ľubovoľné dva vrcholy z rôznych komponentov súvislosti v grafe G_1 sú v grafe G_2 spojené hranou, lebo v G_1 neboli. Zároveň ľubovoľné dva vrcholy z rovnakého komponentu súvislosti, ktoré boli spojené hranou v G_1, nie sú spojené hranou v G_2, ale vieme sa z jedného do druhého pomocou vrcholu z druhého komponentu súvislosti v G_1 dostať inou cestou, čím spĺňame podmienku súvislosti ČBTD.

3. príklad (190/16 a), b))

Zadanie: Graf G je definovaný takto: má 64 vrcholov, ktorým sú vzájomne jednoznačne priradené všetky podmnožiny množiny $\{1,2,3,4,5,6\}$. Dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, keď podmnožiny priradené týmto vrcholom sú disjunktné.

a) Určte počet hrán grafu G.

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 17: TEÓRIA GRAFOV

b) Dokážte, že G je súvislý.

Riešenie:

a) Počet hrán grafu určíme tak, že spočítame hrany, ktoré vychádzajú z jeho jednotlivých vrcholov a potom tento počet vydelíme 2 (každú hranu tak totižto započítame dvakrát). Budeme postupovať tak, že postupne zoberieme vrcholy s priradenými nula-, jedno-, dvoj-, troj-, štvor-, päť- a šesťprvkovými podmnožinami množiny $\{1,2,3,4,5,6\}$ a zistíme koľko hrán z nich dohromady vychádza. Z vrcholu s priradenou prázdnou množinou vychádza 63 hrán (prázdna množina je disjunktná so všetkými ostatnými množinami). Z vrchola s priradenou šesťprvkovou podmnožinou vychádza len jedna hrana do vrcholu s priradenou prázdnou množinou. Jednoprvkových podmnožín množiny $\{1,2,3,4,5,6\}$ je $\binom{6}{1}=6$ a z každej z nich vychádza 2^5 hrán (to je počet podmnožín päťprvkovej množiny, ktorá vznikla z množiny $\{1,2,3,4,5,6\}$, keď sme v nej vynechali prvok nachádzajúci sa vo vybratej jednoprvkovej množine – s týmito podmnožinami je jednoprvková podmnožina disjunktná). Z vrcholov s priradenými jednoprvkovými podmnožinami vychádza teda dohromady 192 hrán. Dvojprvkových podmnožín množiny $\{1,2,3,4,5,6\}$ je $\binom{6}{2}=15$ a z každej vychádza 2^4 hrán. Dokopy je teda 240 hrán vychádzajúcich z dvojprvkových podmnožín. Počet hrán vychádzajúcich z ostatných vrcholov vypočítame podobne:

Trojprvkové podmnožiny: počet hrán $=\binom{6}{3}\cdot 2^3=20\cdot 8=160$

Štvorprvkové podmnožiny: počet hrán $=\binom{6}{4}\cdot 2^2=15\cdot 4=60$

Päťprvkové podmnožiny: počet hrán $=\binom{6}{5}\cdot 2^1=6\cdot 2=12$

Z vrcholov vychádza dohromady teda $63+1+192+240+160+60+12=728$ hrán a počet hrán v grafe je $\frac{728}{2}=364$ hrán.

b) Keďže vrchol s priradenou prázdnou množinou je spojený so všetkými ostatnými vrcholmi, vieme sa cezeň dostať po hranách z ľubovoľného vrcholu do ľubovoľného iného vrcholu. Tým je podmienka súvislosti splnená.

4. príklad ((190/16 c), d), e))

Zadanie: Graf G je definovaný takto: má 64 vrcholov, ktorým sú vzájomne jednoznačne priradené všetky podmnožiny množiny $\{1,2,3,4,5,6\}$. Dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, keď podmnožiny priradené týmto vrcholom sú disjunktné.

c) Dokážte, že G je eulerovský.

d) Dokážte, že G nie je hamiltonovský.

e) Dokážte, že G obsahuje $K_{3,3}$ aj K_5, a teda nie je rovinný.

Riešenie:

Autor: Martin Slota

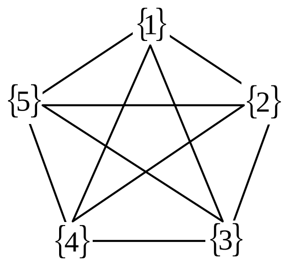
MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

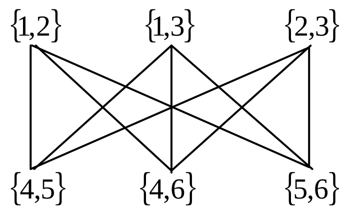
MATURITNÝ OKRUH 17: TEÓRIA GRAFOV

c) Aby sme zistili, či je graf eulerovský, musíme vedieť, akého stupňa (párneho, nepárneho) sú jeho vrcholy a v akom počte. Toto určenie je o niečo obšírnejšie urobené v treťom príklade. Teraz využijeme to, čo sme vyššie už dokázali, na mature to treba predviesť...
Keď že sú v grafe dva vrcholy nepárneho stupňa (s prázdnou a so šesťprvkovou množinou) a ostatné stupňa párneho, je graf eulerovský.

d) Keďže vrchol s priradenou šesťprvkovou množinou je stupňa 1, nemôžeme do neho vojsť aj z neho vyjsť, a teda nemôže byť súčasťou kružnice.

e) Tu sú príklady $K_{3,3}$ a K_5 :



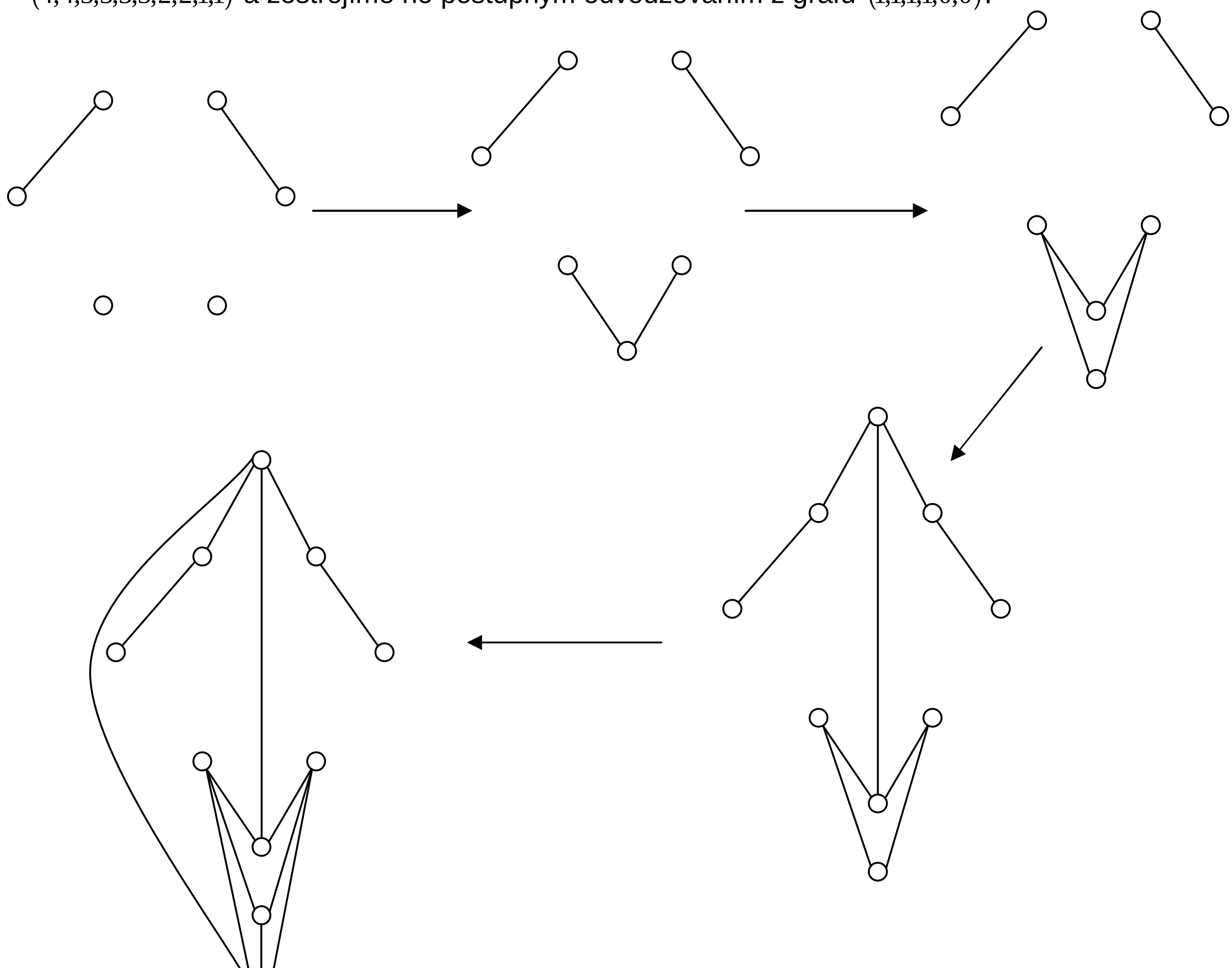


5. príklad (nie je v MK)

Zadanie: Zostrojte graf s desiatimi vrcholmi typu $(4,4,3,3,3,3,2,2,1,1)$.

Riešenie:

Podľa vety platí, že graf typu $(4,4,3,3,3,3,2,2,1,1)\exists \Leftrightarrow \exists(3,3,2,2,2,2,2,1,1) \Leftrightarrow \exists(2,2,2,2,1,1,1,1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists(2,1,1,1,1,1,1) \Leftrightarrow \exists(1,1,1,1,0,0)$. Keďže graf typu $(1,1,1,1,0,0)$ očividne existuje, existuje aj graf typu $(4,4,3,3,3,3,2,2,1,1)$ a zostrojíme ho postupným odvodzovaním z grafu $(1,1,1,1,0,0)$.



Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 17: TEÓRIA GRAFOV

pozn.: Výsledný graf môže samozrejme vyzerať úplne inak, ide len o to, akým spôsobom sme ho vytvorili, takže sa to neučte ako obrázky...

6. príklad (190/17)

Zadanie: Napíšte čísla $1,2,\ldots,9$ do kruhu tak, aby žiadne dve susedné nedávali súčet deliteľný číslami $3,5,7$.

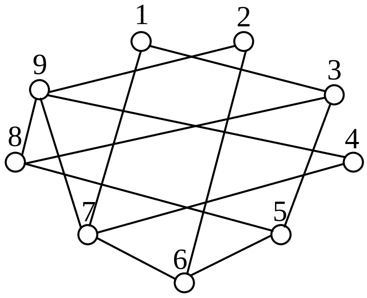
Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 17: TEÓRIA GRAFOV

Riešenie:

Najprv si nakreslíme graf s 9 vrcholmi označenými $1,2,\ldots,9$. V tomto grafe budú dva vrcholy spojené hranou práve vtedy, keď súčet ich označení nebude deliteľný žiadnym z čísel $3,5,7$:



Keď teraz v tomto grafe nájdeme Hamiltonovskú kružnicu, nájdeme (cez označenia jednotlivých vrcholov) vlastne hľadanú postupnosť čísel $1,2,\ldots,9$. V grafe sú vrcholy s označeniami 1, 2 a 4 stupňa 2. To znamená, že v Hamiltonovskej kružnici musia ísť nevyhnutne za sebou vrcholy s označeniami 3, 1, 7 (resp. 7, 1, 3), rovnako aj vrcholy s označeniami 6, 2, 9 (resp. 9, 2, 6) a 7, 4, 9 (resp. 9, 4, 7), inak by sme totiž nemohli prejsť cez vrcholy stupňa 2. Z toho dostávame, že za sebou určite pôjdu vrcholy v tomto poradí: 3, 1, 7, 4, 9, 2, 6. Teraz už stačí len na koniec postupnosti pridať vrcholy s označením 5 a 8. Čiže výsledná postupnosť čísel $1,2,\ldots,9$ v kruhu bude: 5-8-3-1-7-4-9-2-6-5.

pozn.: Ak bol ten predošlý odstavec nezrozumiteľný aj na desiate prečítanie, skús sa nad tým zamyslieť sám, dojdeš na to, určite. Ak ani to nepomôže, tak sa môžeš skúsiť spýtať niekoho, kto tomu rozumie, ústne sa vysvetľuje oveľa lepšie než písomne (aj keď toto by sa dalo dobre vysvetliť aj písomne, len sa mi to myslím moc nepodarilo:o)