Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 23: TROJUHOLNÍK

1. príklad (247/Pr. 1 a))

Zadanie: Rozhodnite, či existuje trojuholník, ktorého výšky majú veľkosť $1, \sqrt{5}, 1+\sqrt{5}$.

Riešenie:

Keďže platí $S_\Delta = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2} \Rightarrow a:b:c = \frac{1}{v_a}:\frac{1}{v_b}:\frac{1}{v_c}$. Strany trojuholníka by teda museli byť v pomere $a:b:c = 1:\frac{1}{\sqrt{5}}:\frac{1}{1+\sqrt{5}}$ a boli by teda tvaru $a, b = \frac{1}{\sqrt{5}}a, c = \frac{1}{1+\sqrt{5}}a$. Pre takéto strany však neplatí trojuholníková nerovnosť: $b + c = \frac{1}{\sqrt{5}}a + \frac{1}{1+\sqrt{5}}a \doteq 0{,}756a < a$. Trojuholník s danými veľkosťami výšok teda neexistuje.

2. príklad (249/Pr. 3)

Zadanie: Trojuholník má obsah 32 cm^2 a súčet veľkostí dvoch jeho strán je 16 cm. Určte veľkosť tretej strany.

Riešenie:

Nech $a + b = 16, S = \frac{ab\sin\gamma}{2} = 32$. Keďže $\forall \gamma \in R; \sin\gamma \le 1$, musí platiť aj $32 = S = \frac{ab\sin\gamma}{2} \le \frac{ab}{2}$.

Z AG-nerovnosti vyplýva, že $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ge ab \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{8} \ge \frac{ab}{2}$, a teda $32 = S = \frac{ab\sin\gamma}{2} \le$ $\le \frac{ab}{2} \le \frac{(a+b)^2}{8} = \frac{16^2}{8} = 32$. Tým pádom teda $\frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ab}{2} \Rightarrow \sin\gamma = 1 \Rightarrow \gamma = 90°$ a zároveň aj $a = b = 8$ (rovnosť aritmetického a geometrického priemeru nastáva práve vtedy, keď sú čísla, z ktorých priemer robíme, rovnaké). Ide teda o rovnoramenný pravouhlý trojuholník s odvesnami dĺžky 8 cm a preponou dĺžky $8\sqrt{2}$ cm.

3. príklad (250/8)

Zadanie: Ak v ΔABC platí $\gamma = 45°$, potom $S = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$. Dokážte.

Dôkaz (priamy):

Nech v ΔABC je $\gamma = 45° \Rightarrow S = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{\sqrt{2}ab}{4}$. Z kosínusovej vety vieme, že $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab \Rightarrow \sqrt{2}ab = a^2 + b^2 - c^2$. Po dosadení teda získavame $S = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$ ČBTD.

4. príklad (250/9)

Zadanie: V ΔABC platí $\gamma = 2\alpha, |AC| = 2 \cdot |BC|$. Dokážte, že ΔABC je pravouhlý.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 23: TROJUHOLNÍK

Dôkaz (priamy):

Nech v ΔABC platí $\gamma = 2\alpha, b = 2a$. Využitím sínusovej vety potom dostávame:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{c}{a} \Rightarrow \underline{\cos\alpha = \frac{c}{2a}}$$

Teraz ešte využijeme aj kosínusovú vetu:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\frac{c}{2a} = b^2 + c^2 - 2bc\frac{c}{b} = b^2 + c^2 - 2c^2 = b^2 - c^2 \Rightarrow \underline{\underline{b^2 = a^2 + c^2}}$$

Dostali sme teda vlastne Pytagorovu vetu platiacu iba pre pravouhlé trojuholníky. ΔABC teda je pravouhlý s preponou b a odvesnami a, c ČBTD.

5. príklad (251/16)

Zadanie: Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka, ak viete, že ťažnica a výška vychádzajúce z jedného vrcholu tohto trojuholníka delia uhol pri tomto vrchole na tri rovnaké uhly.

Riešenie:

Trojuholník si označíme ABC, výšku z vrcholu C si označíme v, ťažnicu z tohto vrcholu t. Priesečníky v a t so stranou AB označíme P a S. Uhly, ktoré vznikli rozdelením uhla pri vrchole C označíme ω. Teraz môžeme prehlásiť, že $\Delta CSP \approx \Delta CBP(usu) \Rightarrow |SP| = |PB| = x$. Keďže ťažnica t delí stranu AB na polovice, platí aj $|AS| = 2x$. Zároveň z podobnosti musí aj platiť, že uhol pri vrchole B a uhol pri vrchole S sú rovné $90° - \omega$.

Teraz dorysujeme kolmicu z bodu S na stranu AC a priesečník tejto kolmice so stranou AC označíme R. Vidíme, že $\Delta CRS \approx \Delta CPS(usu) \Rightarrow |RS| = |SP| = x$. Tiež vieme, že $|\angle CAB| = 90 - 2\omega$.

Použitím vzorca pre goniometrickú funkciu sínus v ΔASR dostávame:

$$\sin(90° - 2\omega) = \frac{x}{2x}$$

$$\sin(90° - 2\omega) = \frac{1}{2}$$

$$90° - 2\omega = 30°$$

$$\omega = 30°$$

ΔABC má teda vnútorné uhly: $\alpha = 30°, \beta = 60°, \gamma = 90°$