

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 28: VEKTORY

1. príklad (296/11)

Zadanie: Dokážte, že pre každé tri vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ platí $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$.

Riešenie (priamy dôkaz):

$$\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$$

$$\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$$

$$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$$

$$\begin{aligned} \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V; (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} &= [u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z] \times [w_x, w_y, w_z] = \begin{matrix} u_y + v_y & u_z + v_z & u_x + v_x \\ w_y & w_z & w_x \end{matrix} \begin{matrix} u_y + v_y \\ w_y \end{matrix} = \\ &= [w_z u_y + w_z v_y - w_y u_z - w_y v_z, w_x u_z + w_x v_z - w_z u_x - w_z v_x, w_y u_x + w_y v_x - w_x u_y - w_x v_y] = \\ &= [w_z u_y - w_y u_z, w_x u_z - w_z u_x, w_y u_x - w_x u_y] + [w_z v_y - w_y v_z, w_x v_z - w_z v_x, w_y v_x - w_x v_y] = \\ &= (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w}) \end{aligned}$$

ČBTD

2. príklad (296/5)

Zadanie: Dokážte, že vektory $\vec{u}_1 = [1, 2, 3], \vec{u}_2 = [6, 2, 1], \vec{u}_3 = [4, 0, 0]$ tvoria bázu v trojrozmernom vektorovom priestore a vyjadrite v tejto báze súradnice vektora $\vec{v} = [0, 0, 1]$.

Riešenie:

Dk. (priamy):

Aby $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ tvorili bázu:

1. musia byť LN: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8 - 24 = -16 \Rightarrow$ sú LN

2. musia generovať A_3 , čiže ľubovoľný vektor $[a, b, c]$ musí byť lineárnou kombináciou vektorov $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$: $[a, b, c] = k \cdot [1, 2, 3] + l \cdot [6, 2, 1] + m \cdot [4, 0, 0]$ ($a, b, c, k, l, m \in \mathbb{R}$)

$$a = k + 6l + 4m \quad (1)$$

$$b = 2k + 2l \quad (2)$$

$$c = 3k + l \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (2) - 2(3): \quad b - 2c &= -4k & (3): \quad c - 3 \frac{2c - b}{4} &= 1 & (1): \quad m &= \frac{a - k - 6l}{4} \\ k &= \frac{2c - b}{4} & c - \frac{6c - 3b}{4} &= 1 \\ & & \frac{3b - 2c}{4} &= 1 \end{aligned}$$

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 28: VEKTORY

Podmienky sú splnené $\Rightarrow \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ tvoria bázu A_3 a $[k, l, m]$ sú súradnice vektora $[a, b, c]$ v tejto báze ČBTD.

Súradnice vektora \vec{v} vypočítame zo vzorcov odvodených v dôkaze: súradnice $[0, 0, 1] = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{8} \right]$.

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 28: VEKTORY

3. príklad (296/7)

Zadanie: Vypočítajte objem štvorstena ABCD, ak $A = [0,0,2]$, $B = [1,-1,4]$, $C = [4,2,4]$, $D = [4,1,2]$ v karteziánskej sústave súradníc.

Riešenie:

$$\vec{u} = \overline{AB} = [1, -1, 2]$$

$$\vec{v} = \overline{AC} = [4, 2, 2]$$

$$\vec{t} = \overline{AD} = [4, 1, 0]$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{t}| = \frac{1}{6} |([1, -1, 2] \times [4, 2, 2]) \cdot [4, 1, 0]| = \frac{1}{6} |[-6, 6, 6] \cdot [4, 1, 0]| = \frac{1}{6} |-24 + 6| = \frac{1}{6} \cdot 18 = \underline{\underline{3}}$$

Objem štvorstena ABCD je 3.

pozn.: Zdôvodnenie použitého vzorca: 292/Pr. 1 (treba si radšej pozrieť, lebo ohľadne toho môžu byť kladené otázky; ten, kto má túto tému, by to mohol aj spomenúť pri teórii...)

4. príklad (296/8)

Zadanie: Nájdite uhol vektorov $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, kde \vec{m} , \vec{n} sú jednotkové vektory, ktorých uhol je 120° .

Riešenie:

$$\begin{aligned} \cos(\angle \vec{a}\vec{b}) = \cos \alpha &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(2\vec{m} + 4\vec{n}) \cdot (\vec{m} - \vec{n})}{\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \cdot \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}} = \frac{2\vec{m} \cdot \vec{m} - 2\vec{m} \cdot \vec{n} + 4\vec{m} \cdot \vec{n} - 4\vec{n} \cdot \vec{n}}{\sqrt{4\vec{m} \cdot \vec{m} + 16\vec{m} \cdot \vec{n} + 16\vec{n} \cdot \vec{n}} \cdot \sqrt{\vec{m} \cdot \vec{m} - 2\vec{m} \cdot \vec{n} + \vec{n} \cdot \vec{n}}} \stackrel{\text{pozn.1}}{=} \\ &= \frac{2|\vec{m}|^2 + 2\vec{m} \cdot \vec{n} - 4|\vec{n}|^2}{\sqrt{4|\vec{m}|^2 + 16\vec{m} \cdot \vec{n} + 16|\vec{n}|^2} \cdot \sqrt{|\vec{m}|^2 - 2\vec{m} \cdot \vec{n} + |\vec{n}|^2}} \stackrel{\text{pozn.2}}{=} \frac{2 + 2\vec{m} \cdot \vec{n} - 4}{\sqrt{4 + 16\vec{m} \cdot \vec{n} + 16} \cdot \sqrt{1 - 2\vec{m} \cdot \vec{n} + 1}} \stackrel{\text{pozn.3}}{=} \\ &= \frac{-2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{20 + 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}} = \frac{-3}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}} = \frac{-3}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 120^\circ}} \end{aligned}$$

Uhol vektorov \vec{a} , \vec{b} je 120° .

Poznámky:

1. $\forall \vec{x} \in V; |\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ (definícia) $\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}|^2$

2. Jednotkový vektor je taký, ktorého veľkosť je rovná 1. Pokiaľ sú teda \vec{m} , \vec{n} jednotkové vektory, musia ich druhé mocniny byť rovné 1.

3. $\angle_{mn} = 120^\circ \Rightarrow \cos(\angle_{mn}) = -\frac{1}{2} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} \stackrel{\text{pozn.2}}{=} \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{1 \cdot 1} = \vec{m} \cdot \vec{n}$

MATURITNÝ OKRUH 28: VEKTORY

5. príklad (296/9)

Zadanie: Ak je vektor \vec{u} kolmý na vektor \vec{v}_1 aj \vec{v}_2 , tak je vektor \vec{u} kolmý aj na vektor $a \cdot \vec{v}_1 - b \cdot \vec{v}_2$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Dokážte.

Riešenie:

$$\text{TD: } \forall \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2; (\vec{u} \perp \vec{v}_1 \wedge \vec{u} \perp \vec{v}_2) \Rightarrow \vec{u} \perp (a \cdot \vec{v}_1 - b \cdot \vec{v}_2)$$

Dôkaz (priamy):

$$\begin{aligned} \forall \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2; (\vec{u} \perp \vec{v}_1 \wedge \vec{u} \perp \vec{v}_2) &\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0 = \vec{u} \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{u} \cdot (a \cdot \vec{v}_1 - b \cdot \vec{v}_2) &\stackrel{\text{pom. tvr. 1}}{=} \vec{u} \cdot (a \cdot \vec{v}_1) - \vec{u} \cdot (b \cdot \vec{v}_2) \stackrel{\text{pom. tvr. 2}}{=} a \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}_1) - b \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}_2) = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp (a \cdot \vec{v}_1 - b \cdot \vec{v}_2) \quad \checkmark \text{BTD} \end{aligned}$$

Pomocné tvrdenia:

$$1. \text{ TD: } \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{t}; \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{t}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{t}$$

Dôkaz (priamy):

$$\begin{aligned} \vec{u} &= [u_1, u_2], \vec{v} = [v_1, v_2], \vec{t} = [t_1, t_2] \quad (u_1, u_2, v_1, v_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}) \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{t}) &= [u_1, u_2] \cdot ([v_1, v_2] - [t_1, t_2]) = [u_1, u_2] \cdot [v_1 - t_1, v_2 - t_2] = u_1 \cdot v_1 - u_1 \cdot t_1 + u_2 \cdot v_2 - u_2 \cdot t_2 = \\ &= (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2) - (u_1 \cdot t_1 + u_2 \cdot t_2) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{t} \quad \checkmark \text{BTD} \end{aligned}$$

$$2. \text{ TD: } \forall \vec{u}, \vec{v}; \vec{u} \cdot (a \cdot \vec{v}) = a \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (a \in \mathbb{R})$$

Dôkaz (priamy):

$$\begin{aligned} \vec{u} &= [u_1, u_2], \vec{v} = [v_1, v_2] \quad (u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}) \\ \vec{u} \cdot (a \cdot \vec{v}) &= [u_1, u_2] \cdot (a \cdot [v_1, v_2]) = [u_1, u_2] \cdot [a \cdot v_1, a \cdot v_2] = u_1 \cdot a \cdot v_1 + u_2 \cdot a \cdot v_2 = a \cdot (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2) = \\ &= a \cdot ([u_1, u_2] \cdot [v_1, v_2]) = a \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad \checkmark \text{BTD} \end{aligned}$$

Poznámka:

Dôkazy pomocných tvrdení sa dajú obdobne previesť aj pre aritmetický vektorový priestor usporiadaných n-tíc.