ZONES.SK
Zóny pre každého študenta

Autor: Martin Slota

Zdroj: http://www.zones.sk

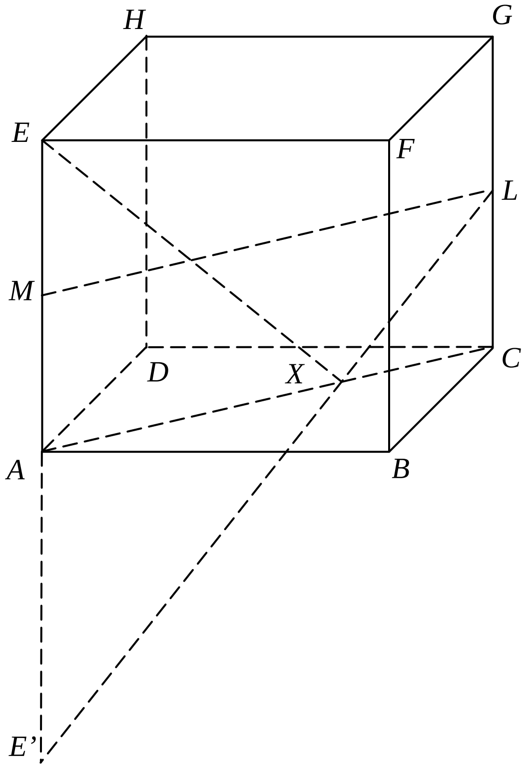
Používanie materiálov zo ZONES.SK je povolené bez obmedzení iba na osobné účely a akékoľvek verejné publikovanie je bez predchádzajúceho súhlasu zakázané.

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 22: ZHODNÉ A PODOBNÉ ZOBRAZENIA

1. príklad (236/Pr. 1)

Zadanie: Bod L je stredom hrany CG kocky $ABCDEFGH$ s dĺžkou hrany a. Určte dĺžku x najkratšej lomenej čiary EXL, ak bod X patrí rovine ABC. (Máme určiť dĺžku svetelného lúča, ktorý vychádza z bodu E a po odraze od zrkadla ABC dopadá do bodu L.)



Riešenie:

Zostrojíme bod E' súmerne združený s bodom E podľa roviny ABC. Priamka $E'L$ pretne rovinu ABC v bode X, pre ktorý platí, že dĺžka lomenej čiary EXL je najmenšia. (Zo súmernosti podľa roviny ABC vyplýva, že $|EX| = |E'X|$, teda dĺžka lomenej čiary EXL je rovnaká ako dĺžka čiary $E'XL$ a tá je najkratšia, keď ležia body E', X, L na priamke.) Treba ešte určiť dĺžku x čiary EXL. Tá sa rovná dĺžke úsečky $E'L$, ktorú vypočítame z pravouhlého trojuholníka $E'ML$, kde M je stred hrany EA. Teda

$$x = \sqrt{|LM|^2 + |ME'|^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{17}\cdot a}{2}}}.$$

2. príklad (240/4)

Zadanie: Zostrojte päťuholník $ABCDE$, ak sú dané stredy všetkých jeho strán: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.

Riešenie:

Zo zadania môžeme zapísať niekoľko stredových súmerností:

$$\left.\begin{array}{l} S_{S_1}: A \to B \\ S_{S_2}: B \to C \\ S_{S_3}: C \to D \\ S_{S_4}: D \to E \\ S_{S_5}: E \to A \end{array}\right\} \Rightarrow S_{S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4 \circ S_5}: A \to A$$

Vieme, že zložením párneho počtu stredových súmerností vzniká identita alebo posunutie a združovaním nepárneho počtu stredových súmerností vzniká stredová súmernosť. V našom prípade sme zložili nepárny počet stredových súmerností a vznikla nám teda stredová súmernosť so stredom v bode A (pretože je samodružný). Päťuholník sa teraz dá zostrojiť nasledujúcim postupom:

1. Zvolíme si ľubovoľný bod L a zobrazíme ho v zloženej stredovej súmernosti $S_{S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4 \circ S_5}: L \to L'$.
2. Zostrojíme stred úsečky LL' a dostaneme tak bod A.
3. Zostrojíme ostatné body päťuholníka cez ostatné stredové súmernosti.

Zdroj: http://www.zones.sk

Používanie materiálov zo ZONES.SK je povolené bez obmedzení iba na osobné účely a akékoľvek verejné publikovanie je bez predchádzajúceho súhlasu zakázané.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 22: ZHODNÉ A PODOBNÉ ZOBRAZENIA

3. príklad (241/5)

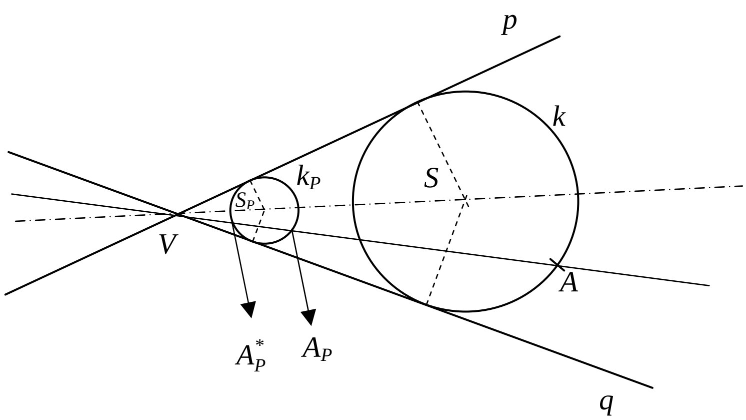
Zadanie: Dané sú dve rôznobežky p,q a mimo nich bod A. Zostrojte všetky kružnice, ktoré prechádzajú bodom A a dotýkajú sa p aj q.

Riešenie:

Aby sme zostrojili kružnice požadovaných vlastností, stačí nám zostrojiť ich stredy, ich polomer už potom ľahko zistíme ako vzdialenosť nájdených stredov od bodu A (alebo od jednej z priamok). Vieme, že spomínané stredy ležia na osi uhla priamok p,q (resp. na osi susedného uhla k uhlu priamok p,q, podľa toho, kde sa nachádza bod A). Vieme teda zostrojiť takú pomocnú kružnicu k_P, ktorá síce nebude prechádzať bodom A, ale bude sa dotýkať oboch priamok, teda $k_P(S_P,|S_P,q|)$. Potom vieme, že v rovnoľahlosti so stredom v bode $V \in p \cap q$ sa zobrazí kružnica k_P do kružnice k $(H_V : k_P \to k)$. V opačnej rovnoľahlosti sa zase zobrazí kružnica k do kružnice k_P, a teda aj bod A do bodu A_P. Teda body V, A, A_P ležia na jednej priamke. Keďže vieme zostrojiť kružnicu k_P, vieme zostrojiť aj bod A_P a pomocou rovnobežky s $\overleftrightarrow{S_P A_P}$ cez bod A aj stred S kružnice k.

Postup:

1. p,q,A
2. os uhla priamok p,q
3. $S_P; S_P \in$ osi
4. $k_P; k_P(S_P,|S_P,q|)$
5. $A_P, A_P^*; \{A_P, A_P^*\} = \overleftrightarrow{VA} \cap k_P$
6. $l; A \in l \wedge l \parallel \overleftrightarrow{S_P A_P}$
7. $l^*; A \in l^* \wedge l^* \parallel \overleftrightarrow{S_P A_P}$
8. $S; S \in l \cap$ os
9. $S^*; S^* \in l^* \cap$ os
10. $k(S,|SA|)$
11. $k^*(S^*,|S^*A|)$



pozn.: kvôli prehľadnosti chýba v obrázku druhé riešenie a tiež niektoré časti postupu

4. príklad (241/11)

Zadanie: Dokážte, že ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

Dôkaz (priamy, cez rovnoľahlosť):

Nech ΔABC je ľubovoľný a A_1, B_1, C_1 nech sú postupne stredy strán BC, AC, AB. C_2 nech je stred A_1B_1. Označme $T \in AA_1 \cap BB_1$. Dôkaz prevedieme v štyroch krokoch:

1. $\left.\begin{array}{l} H_C : B_1 \to A\ (k=2) \\ H_C : A_1 \to B\ (k=2) \end{array}\right\} \Rightarrow H_C : C_2 \to C_1 \Rightarrow C, C_1, C_2$ ležia na jednej priamke
2. $\left.\begin{array}{l} H_C : B_1 \to A\ (k=2) \\ H_C : A_1 \to B\ (k=2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A_1B_1 \parallel AB \\ 2|A_1B_1| = AB \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta A_1B_1T \approx \Delta ABT\ (uu)$
3.

Zdroj: http://www.zones.sk
Používanie materiálov zo ZONES.SK je povolené bez obmedzení iba na osobné účely a akékoľvek verejné publikovanie je bez predchádzajúceho súhlasu zakázané.

Autor: Martin Slota

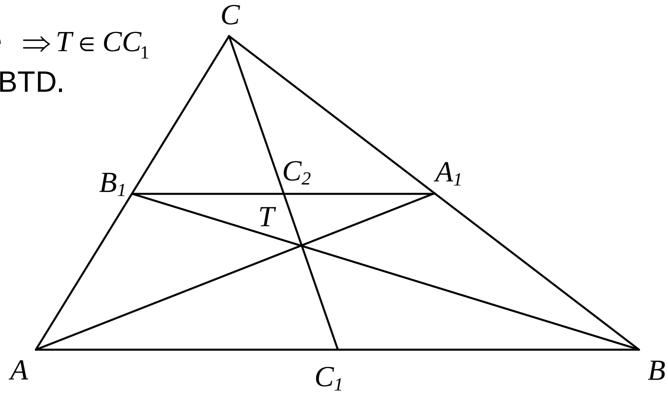
MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 22: ZHODNÉ A PODOBNÉ ZOBRAZENIA

$$\left.\begin{aligned} H_T : A_1 \to A\,(k=2) \\ H_T : B_1 \to B\,(k=2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow H_T : C_2 \to C_1 \Rightarrow T, C_1, C_2$$ ležia na jednej priamke

4. $(1. \wedge 3.) \Rightarrow C, C_1, C_2, T$ ležia na jednej priamke $\Rightarrow T \in CC_1$

Bod T teda leží na všetkých troch ťažniciach, ČBTD.



Používanie materiálov zo ZONES.SK je povolené bez obmedzení iba na osobné účely a akékoľvek verejné publikovanie je bez predchádzajúceho súhlasu zakázané.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 22: ZHODNÉ A PODOBNÉ ZOBRAZENIA

5. príklad (241/14)

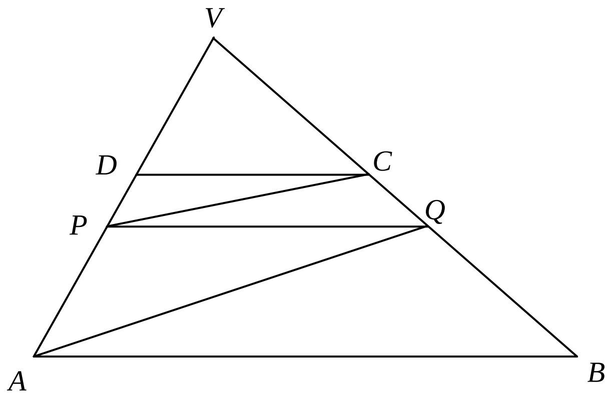
Zadanie: Je daný lichobežník $ABCD$, ktorého základne sú AB a CD, pričom $AB > CD$. Vnútri úsečky AD zostrojte bod P a vnútri úsečky BC bod Q tak, aby platili zároveň vzťahy $PQ \parallel AB$ a $PC \parallel AQ$.

Riešenie:

Zostrojíme bod $V \in AD \cap BC$.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta PCV \approx \Delta AQV\ (uu) \Rightarrow \dfrac{|VP|}{|VA|} = \dfrac{|VC|}{|VQ|} \\ \Delta PQV \approx \Delta ABV\ (uu) \Rightarrow \dfrac{|VP|}{|VA|} = \dfrac{|VQ|}{|VB|} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|VC|}{|VQ|} = \frac{|VQ|}{|VB|} \Rightarrow |VQ| = \sqrt{|VC| \cdot |VB|}$$

Pomocou odvodeného vzťahu zostrojíme bod Q a bod P zostrojíme pomocou zadaného poznatku $PQ \parallel AB \wedge P \in AV$.



pozn.: Pri zostrojení $|VQ|$ využijeme Euklidovu vetu o odvesne. Euklidove vety vyzerajú takto:

1. o výške: $c_a \cdot c_b = v^2 \left(\Rightarrow v = \sqrt{c_a \cdot c_b}\right)$
2. o odvesne: $a^2 = c_a \cdot c$ a $b^2 = c_b \cdot c$