Veronika Kačová, Anna Vallušová, Pavel Michlík, Lukáš Zemčák, Tomáš Korenko

VYPRACOVANIE
CIEĽOVÝCH POŽIADAVIEK NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI MATURANTOV Z MATEMATIKY
ÚROVEŇ A

Poprad 2005

Vypracovanie teórie z matematiky pre stredné školy a gymnáziá podľa cieľových požiadaviek Štátneho pedagogického ústavu úrovne A pre školský rok 2004/2005:

Vypracovanie obsahuje 5 základných celkov rozdelených do niekoľkých častí:

Vyvinuté pre: Gymnázium Poprad, Ulica Kukučínova 4239/1, 058 01 POPRAD
Kontakt: confused@zem.sk, ixxo@zem.sk (po zistení akých koľvek chýb, alebo nepresností nás prosím kontaktujte)

Poprad 9.5.2005

RadixX n.b.corp

1. Základy matematiky

1.1 Logika a množiny

Výrok – oznamovacia veta s jednoznačnou pravdivostnou hodnotou
Axióma – základná poučka, výrok matematickej teórie, ktorý sa v jej rámci považuje za správny bez toho, aby sa jeho správnosť dokazovala
Definícia – definovanie alebo určenie vzťahu / výrazu na základe axióm alebo predom dokázaných viet
Úsudok – rozhodnutie o pravdivosti predpokladu
Matematická veta – vymedzuje a určuje vlastnosti
Hypotéza – výrok u ktorého nevieme určiť, či pravdivostná hodnota existuje
Tvrdenie – niečo čo sa o objekte tvrdí
Pravdivostná hodnota – pravdivostnú hodnotu výroku rozumieme jeho pravdivosť alebo nepravdivosť

- pravdivosť – označujeme číslom 1 (alebo iným kladným číslom)
- nepravdivosť – označujeme symbolom 0

Logické spojky – prostriedky na získanie zložitých výrokov

- logickú spojku definujeme ako funkciu jedného alebo dvoch výrazov do množiny (0, ∞)
- 0 – znamená že zložený výrok neplatí
- N – znamená že zložený výrok platí

negácia – logická spojka ktorá mení pravdivostnú hodnotu výroku na opačnú - A', $\neg A$

konjunkcia – $p \wedge q$ (čítame: p a zároveň q) Pr: Prišiel a zvíťazil.

- konjunkcia sa ináč nazýva logický súčin ➔ pravdivostné hodnoty sa násobia

alternatíva - $p \vee q$ (čítame: p alebo q) Pr: Pôjdem do kina alebo do divadla.

- alternatíva sa ináč nazýva aj logický súčet ➔ pravdivostné hodnoty sa sčítavajú

implikácia – $p \Rightarrow q$ (čítame: ak platí p tak platí aj q) Pr: Ak budeš mať jednotky, tak dostaneš auto.

- obrátená implikácia – $q \Rightarrow p$ Pr: Ak dostaneš auto, tak budeš mať jednotky.

- obmenená implikácia - $q' \Rightarrow p'$ Pr: Ak nedostaneš auto, tak nebudeš mať jednotky.

- má rovnaké pravdivostné hodnoty ako základná implikácia

ekvivalencia – $p \Leftrightarrow q$ (čítame: p platí práve vtedy keď platí q)

p	q	p′	q′	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$q' \Rightarrow p'$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1

Negácie výrokov – ak má výrok p pravdivostnú hodnotu 1, tak p′ (negovaný výrok) bude mať pravdivostnú hodnotu 0 a opačne

negácia konjuncie - $(p \wedge q)' = p' \vee q'$

negácia alternatívy - $(p \vee q)' = p' \wedge q'$

negácia implikácie - $(p \Rightarrow q)' = p \wedge q'$

Vyplýva – ak z výroku p vyplýva výrok q, tak ide o implikáciu: $p \Rightarrow q$
Je ekvivalentné – dva výroky sú ekvivalentné ak sa rovnajú ich pravdivostné hodnoty

- $p \Rightarrow q$ je ekvivalentné s $q' \Rightarrow p'$

Kvantifikovaný výrok – vymedzuje množstvo prvkov, pre kt. výrok (ne)platí
Kvantifikátory:

- všeobecný - ∀ – všetky Pr: $\forall x \in N: x > 0$

- všetky x patriace N sú väčšie ako 0

- existenčný - ∃ – existuje Pr: $\exists x \in N: x = 3$

- existuje x patriace N rovnajúce sa 3

- ∃! – existuje práve jedno Pr: $\exists! x \in N: x = 3$

- existuje práve 1 x patriace N rovnajúce sa 3

- ∄ – neexistuje

Negácia kvantifikátorov – $(\forall x \in R, x > 0)' = \exists x \in R, x \leq 0$

Priamy dôkaz – pomocou implikácií z A1 dokážeme An

A1 => A2, A2 => A3, ..., An-1 => An (reťazec implikácií)

A1 – výrok, ktorý dokazujeme

An – axióma alebo už dokázaná veta

Nepriamy dôkaz – výrok A => B dokážeme pomocou jeho obmeny B′ =>A′ ; (B′ => A′) = (A => B)

Dôkaz sporom – 1. vyslovíme negáciu výroku V, tj: V′

2. zostavíme reťazec implikácií: V′ => Z1 => Z2 => ... = > Z ; kde Z neplatí = spor

3. rozhodneme, že neplatí V′, teda platí V

Matematická indukcia - 1. dokážeme priamo že daný vzťah či vlastnosť platí pre najmenšie prirodzené číslo pre ktoré platiť má

2. máme predpoklad a tvrdenie; predpokladám, že vzťah platí pre k Є N a dokážem, že platí aj pre (k + 1) Є N

3. ak vzťah platí pre najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré platiť má ň, podľa 2. kroku platí aj pre každé ďalšie prirodzené číslo (k + 1)

Množina – základný pojem, je to súbor / skupina nejakých objektov, ktoré nazývame prvky množiny

- množiny označujeme veľkými písmenami abecedy A, B, C, ...
- prvky množiny označujeme malými písmenami a, b, c, ...
- skutočnosť objekt patrí do množiny zapisujeme: a Є A
- skutočnosť že objekt nepatrí do množiny: a ∉ A
- množina môže byť určená - 1. vymenovaním ∀ prvkov
  2. charakteristickou vlastnosťou Pr: 5 < x < 11

- množina môže byť - 1. konečná – má konečný počet prvkov
  2. nekonečná – má nekonečný počet prvkov

Podmnožina – hovoríme, že množina A je podmnožinou množiny B, každý prvok množiny A patrí aj B

- zapisujeme – A ⊂ B – inklúzia množiny A na množine B

Nadmnožina – hovoríme, že množina B je nadmnožinou množiny A

- zapisujeme – B ⊃A

Rovnosť množín – ak pre množiny A a B platia vzťahy A ⊃ B a A ⊂ B , tak hovoríme že množiny A a B sa navzájom rovnajú

- zapisujeme – A = B (každý prvok A je zároveň prvkom B)

Zjednotenie – zjednotením dvoch množín A a B nazývame množinu C = A ∪ B , ktorá obsahuje práve tie prvky zo základnej množiny Z, ktoré sú prvkami množiny A alebo množiny B

C = A ∪ B = {x Є Z; x Є A ∨ x Є B}

Prienik – prienik dvoch množín A a B nazývame množinu C, ktorá obsahuje práve tie prvky zo základnej množiny Z, ktoré patria A a zároveň B

C = A ∩ B = {x Є Z; x Є A ∧ x Є B}

Rozdiel – rozdiel dvoch množín A a B nazývame množinu C, ktorá obsahuje práve tie prvky zo základnej množiny Z, ktoré patria A a zároveň nepatria B

C = A – B = {x Є Z; x Є A ∧ x ∉ B}

Doplnok – doplnok množiny A k základnej množine Z nazývame množinu A′, ktorá obsahuje práve tie prvky zo základnej množiny Z, ktoré nepatria do množiny A

A′ = {x Є Z; x ∉ A}

Prázdna množina – množina ktorá neobsahuje ani jeden prvok

A = {} = ∅

Vennove diagramy – znázornenie množiny pomocou geometrických útvarov

- Pr: zjednotenie ➔ prienik dvoch kruhov

Disjunktné množiny – množiny, ktoré nemajú spoločný prienik

Počet prvkov zjednotenia dvoch množín - | A ∪ B | = | A | + | B | - | A ∩ B |

1.2 Čísla, premenné a výrazy

Konštanta – pojem pre taký symbol, ktorý označuje jediný objekt, teda nemení svoju hodnotu
Premenná – pojem pre taký symbol, ktorý označuje ľubovoľný objekt z daného súhrnu (definičného oboru)
Obor definície výrazu – definičný obor – množina prvkov pre daný výraz, pričom premenná z tohto výrazu môže nadobúdať len hodnoty z tejto množiny; $x \in D(x)$
Rovnosť výrazov – výrazy sa rovnajú práve vtedy, keď pre $\forall$ hodnoty z definičného oboru tohto výrazu majú výrazy rovnaké hodnoty
Hodnota výrazu – je funkčná hodnota v bode $x \in D$
Mnohočlen – celistvý algebraický výraz $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$; $a_0 - a_n \in R$ = koeficienty

– n – stupeň mnohočlena

– a_0 - absulútny člen

Doplnenie do štvorca – znamená upraviť výraz na tvar: $(a+b)^2 + c$
Prirodzené čísla – N ; N = {1, 2, 3, ..., ∞}
Nezáporné čísla - N_0 ; N_0 = {0, 1, 2, ..., ∞}
Celé čísla – Z ; Z = {-∞, ..., -1, 0, 1, ..., ∞}
Záporné čísla - Z^- ; Z^- = {-∞, ..., -2, -1}
Racionálne čísla – Q ; Q – všetky čísla ktoré sa dajú zapísať v tvare zlomku zloženého z dvoch celých čísel
Iracionálne čísla – I ; I – čísla ktoré sa nedajú zapísať v tvare zlomku
Reálne čísla – R ; $R = I \cup Q$
Komplexné čísla – čísla ktoré môžu mať reálnu aj imaginárnu zložku

- C = R + {i} ; pričom $i^2 = -1$ Pr: 4 + 3i

N-ciferné číslo – číslo ktoré sa skladá z n-cifier
Zlomok = $\dfrac{\textit{čitateľ}}{\textit{menovateľ}}$
Základný tvar zlomku – čitateľ a menovateľ sú nesúdeliteľné
Zložený zlomok – zlomok ktorého čitateľ alebo menovateľ je tiež zlomok
Desatinný rozvoj - $\forall$ čísla za desatinnou čiarkou

- **konečný -** má istý počet prvkov
- **nekonečný –** pokračuje do nekonečna
- **periodický –** nekonečný, pričom sa určitá postupnosť cifier opakuje

Číslo e – Eulerovo číslo – také číslo, pre ktoré: $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

– e = 2,71828...

Číslo π – 3,141592654..., číslo ktoré určuje obvod jednotkovej polkružnice
Nekonečno - ∞
Číselná os – súradnicová sústava na priamke, so zvoleným počiatkom osi
Komutatívny zákon – zákon zameniteľnosti ➔ a + b = b + a ; a.b = b.a
Asociatívny zákon – zákon združovania ➔ (a + b) + c = a + (b + c) ; (a.b).c = a.(b.c)
Distributívny zákon – zákon roznásobenia súčtu ➔ a.(b + c) = a.b + a.c
N-tá odmocnina – číslo a pre ktoré platí: $a^n = b$; $a, n, b \in R$
N-tá mocnina - a^n; a^n = a.a.a.....a }n-krát; a – základ; n – exponent
Logaritmus - $\log_b a = c$; pričom platí: $b^c = a$; b – základ logaritmu; $b \in R^+ - \{1\}$
Prirodzený logaritmus – ln a = $\log_e a$
Absolútna hodnota čísla – vzdialenosť čísla od nuly na číselnej osi
Úmera– priama – funkcia s predpisom y = k.x grafom je priamka, k – smernica priamky

– nepriama – funkcia s predpisom $y = \dfrac{k}{x}$ grafom je hyperbola

Percentá – percentá udávajú časti z daného celku, pričom: 100% = celok; 1% = $\dfrac{1}{100}$ celku

Promile – udávajú časti z celku, pričom: 1000‰ = celok; 1‰ = $\frac{1}{1000}$ celku

Základ – je celok

Faktoriál – z čísla n je definovaný ako: n! = n.(n - 1).(n - 2).....2.1 ; n Є N

Kombinačné číslo - pre nezáporné celé čísla *k*, *n* sa tzv. kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ definuje takto:

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \left(\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} \atop 0\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad 0 \le k \le n$$

Interval – uzavretý – $\langle a,b \rangle$ – je množina všetkých x, pre ktoré platí: $a \le x \le b$

– otvorený – (a,b) – je množina všetkých x, pre ktoré platí: $a < x < b$

1.3 Teória čísel

Deliteľ – je každé celé číslo, pre ktoré platí, že pri delení daného čísla týmto číslom nedostaneme zvyšok
Násobok – je každé číslo, ktoré sa dá zapísať v tvare: n = k.x ; n – násobok; k Є Z
Deliteľnosť – číslo *a* je deliteľné číslom *b*, ak pri delení čísla *a* číslom *b* nedostaneme zvyšok
Zvyšok – zvyšok po delení čísla *a* číslom *b* je číslo za desatinnou čiarkou tohto podielu
Najväčší spoločný deliteľ (NSD) – NSD(a,b) – je to najväčšie celé číslo *d*, ktoré delí bez zvyšku čísla *a* a *b*
- súčin spoločných prvočiniteľov čísel *a* a *b*

Najmenší spoločný násobok (nsn) – nsn(a,b) – spoločný násobok čísel *a*,*b*, ktorý je deliteľom každého iného ich spoločného násobku
- súčin všetkých prvočiniteľov *a* a *b*, ktoré sa vyskytujú aspoň v jednom rozklade, pričom berieme prvočiniteľa s najväčším mocniteľom

Euklidov algorytmus – NSD(a,b) (a,b Є Z - {0}, a > b); číslo *a* delíme *b*, pri zvyšku $r_1 \neq 0$ delíme číslo *b* číslom r_1 a určíme zvyšok r_2, pri $r_2 \neq 0$ delíme r_1 číslom r_2, ak po *n* krokoch dostaneme zvyšok $r_n = 0$, tak NSD(a,b) = r_{n-1}
Prvočíslo – je každé prirodzené číslo, ktoré má len nevlastné delitele
- každé číslo, ktoré sa dá deliť bez zvyšku len sebou samým a jednotkou
- je ich nekonečne veľa

Zložené číslo – je každé číslo rôzne od nuly, ktoré má aspoň jedného vlastného deliteľa
Nesúdeliteľné čísla – čísla, ktorých NSD = 1
Prvočíselný rozklad – každé zložené číslo a Є N sa dá jednoznačne rozložiť na súčin *n* prvočísel; n Є N
Prvočiniteľ – je každé prvočíslo, ktoré je deliteľom daného čísla
Kritériá deliteľnosti – posledná cifra – 2 – číslo je deliteľné 2 ak má na poslednom mieste 0,2,4,6,8
– 5 – ak má na poslednom mieste 0,5
– 10 – ak má na poslednom mieste 0
– posledné 2 cifry – 4 – ak je posledné 2-číslie deliteľné 4
– 20, 25, 50, 100 – podobne ako 4
– posledné 3 cifry – 8 – ak je posledné 3-číslie deliteľné 8
– 40, 125, 200, 250, 500, 100 – podobne ako 8
– súčet – 3 – ak je ciferný súčet deliteľný 3
– 9 – podobne ako 3
– 4 – ak súčet poslednej číslice a dvojnásobku predposlednej číslice je del. 4
– 11 – ak súčet dvojčíslí začínajúc od poslednej číslice je deliteľný 11
– 27 – ak súčet posledného trojčíslia a čísla zo zvyšných cifier je del. 27
– 37 – podobne ako 27
– rozdiel – 7 – ak je rozdiel posledného trojčíslia a čísla zo zvyšných cifier del. 7
– ak je menšenec menší ako menšiteľ, tak menšenca zväčšíme o násobok 7

- ak je číslo *s* aj *t* deliteľné číslom *m*, tak aj *s* ± *t* je deliteľné číslom *m*
- ak je číslo deliteľné prvočíslom *m* aj prvočíslom *k*, tak je deliteľné aj číslom *k.m*

1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy

Rovnica – rozumieme pod ňou vzťah: *f(x) = g(x)*, riešiť rovnicu znamená určiť ∀ x pre ktoré sa z rovnice stáva pravdivá rovnosť

Nerovnica – rozumieme pod ňou vzťah: *f(x) N g(x)*, pričom *N* môže byť {>, ≥, <, ≤, ≠}; riešiť nerovnicu znamená určiť ∀ x pre ktoré sa z nerovnice stáva pravdivá nerovnosť

Sústava rovníc – súbor niekoľkých rovníc s niekoľkými neznámymi, kde platí (okrem špec. prípadov), že počet neznámych sa rovná počtu rovníc

- riešiť takéto rovnice môžme spôsobmi – substitučnou metódou
  – sčítacou metódou
  – pomocou matíc
  – graficky

Sústava nerovníc – súbor niekoľkých nerovníc

- riešime buď určením K_n ∀ nerovníc a K = $K_1 \cap K_2 \cap ... \cap K_n$
- v prípade 2 a 3 neznámych môžme riešiť aj graficky

Koeficient – $a_0 - a_n$ Є R v mnohočlene, udáva početnosť výskytu n-tého člena mnohočlena

Koreň – číselná hodnota, ktorú keď dosadíme do rovnice/nerovnice, tak dostaneme pravdivý výrok

Kvadratická rovnica – rovnica s predpisom: $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$

- ax^2 – kvadratický člen; a – koeficient pri kvadratickom člene
- bx – lineárny člen; b – koeficient pri lineárnom člene
- c – absolútny člen
- **riešenie kvadratickej rovnice :**

1. doplnenie do štvorca – každá kvadratická rovnica sa dá napísať v tvare:

$ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2) = 0$; x_1, x_2 - korene kvadratickej rovnice

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$; $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$

$x^2 + px + q = 0$; platí: $-p = x_1 + x_2$; $q = x_1 . x_2$

2. riešenie pomocou diskriminantu – D

$ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$

$D = b^2 - 4ac$ - ak - $D > 0$ ➔ dva reálne korene
- $D = 0$ ➔ jeden dvojnásobný koreň
- $D < 0$ ➔ žiaden reálny koreň

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

- dôkaz: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

označme **b² - 4ac** ako D, potom $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0$, podľa vzorca **a² - b²** rozložme

na: $\left(x + \frac{b - \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{D}}{2a}\right) = 0$ => $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

Substitúcia – spôsob riešenia rovnice pri ktorom sa časť výrazu nahradí jednoduchším výrazom/premennou

Úpravy rovníc – 1. ekvivalentné – úpravy, ktoré nemenia korene rovnice - ani kvalitu, ani kvantitu

– 2. neekvivalentné – úpravy, ktoré menia korene rovnice – kvalitu, alebo kvantitu

Kontrola (skúška) riešenia – je povinná, ak sme pri riešení používali neekvivalentné úpravy

- 1. dosadíme koreň do ľavej strany rovnice
  2. dosadíme koreň do pravej strny rovnice
  3. porovnáme hodnoty, ak sa rovnajú, tak skúmaný koreň je koreňom rovnice

Koreňový činiteľ – opačná hodnota ku koreňu

2. Funkcie

2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti

Premenná – pojem pre taký symbol, ktorý označuje ľubovoľný objekt z daného definičného oboru
Funkcia – funkciou nazývame množinu usporiadaných dvojíc [x,y] , pre ktoré platí, že pre všetky x existuje práve jedno y Є R , platí: y = f (x)
Postupnosť – funkcia, ktorej definičný obor je množina ∀ prirodzených čísel {1, 2, ..., ∞} - nekonečná, alebo jej ľubovoľná podmnožina {1, 2, ..., k} - konečná
Argument – nezávislá premenná, čiže premenná od ktorej závisí iná premenná (funkčná hodnota)
– napr. premenná x vo funkcii f: y = ax + b
Funkčná hodnota – hodnota y, ktorú nadobúda funkcia v bode x
Člen postupnosti – každá hodnota funkcie postupnosti
Definičný obor (D) – množina tých x, pre ktoré má rovnica udávajúca funkciu zmysel
Obor hodnôt funkcie (H) – množina ∀ y, pre ktoré ∃ také x Є D, že [x,y] Є f
Graf funkcie (postupnosti):

– **rastúca** – funkcia sa nazýva rastúca, keď pre ∀ x_1, x_2 Є D: $x_1 < x_2$ => $f(x_1) < f(x_2)$
– **klesajúca** – funkcia sa nazýva klesajúca, keď pre ∀ x_1, x_2 Є D: $x_1 < x_2$ => $f(x_1) > f(x_2)$
– **nerastúca** – funkcia sa nazýva nerastúca, keď pre ∀ x_1, x_2 Є D: $x_1 < x_2$ => $f(x_1) \geq f(x_2)$
– **neklesajúca** – funkcia sa nazýva neklesajúca, keď pre ∀ x_1, x_2 Є D: $x_1 < x_2$ => $f(x_1) \leq f(x_2)$
– **monotónna –** ak je rastúca, klesajúca, nerastúca, alebo neklesajúca na celom definičnom obore
– **maximum –** funkcia má maximum v bode a, ak pre ∀ x Є D: f (x) ≤ f (a)
– **minimum –** funkcia má minimum v bode b, ak pre ∀ x Є D: f (x) ≥ f (b)
– **ostré maximum –** funkcia má ostré maximum v bode a, ak pre ∀ x Є D, x ≠ a: f (x) < f (a)
– **ostré minimum –** funkcia má ostré minimum v bode b, ak pre ∀ x Є D, x ≠ b: f (x) > f (b)
– **lokálne maximum –** funkcia má maximum na množine M v bode a, ak pre ∀ x Є M: f (x) ≤ f (a)
– **lokálne minimum –** funkcia má minimum na množine M v bode b, ak pre ∀ x Є M: f (x) ≥ f (b)
– **zhora ohraničená –** funkcia sa nazýva zhora ohraničená, ak pre ∀ x Є D ∃ h Є R: f (x) ≤ h
– **zdola ohraničená –** funkcia sa nazýva zdola ohraničená, ak pre ∀ x Є D ∃ d Є R: f (x) ≥ d
– **ohraničená –** funkcia sa nazýva ohraničená, ak je ohraničená zhora aj zdola
– **konštantná** – funkcia sa nazýva konštantná, keď pre ∀ x_1, x_2 Є D: $x_1 \neq x_2$ => $f(x_1) = f(x_2)$
– **prostá** – funkcia sa nazýva prostá, keď pre ∀ x_1, x_2 Є D: $x_1 \neq x_2$ => $f(x_1) \neq f(x_2)$
– **periodická funkcia** – funkcia sa nazýva periodická <=> ∃ p > 0: ∀ x Є Z:

1. x Є D(f) => x + k.p Є D(f)
2. f (x) = f (x + k.p)

– **párna –** funkcia sa nazýva párnou práve vtedy, ak súčasne platí:

1. pre každé x Є D(f) aj -x Є D(f)
2. pre každé x Є D(f) platí: f (-x) = f (x)

– graf párnej funkcie je súmerný podľa osi y

– **nepárna –** funkcia sa nazýva nepárnou práve vtedy, ak súčasne platí:

1. pre každé x Є D(f) aj -x Є D(f)
2. pre každé x Є D(f) platí: f (-x) = -f (x)

– graf nepárnej funkcie je súmerný podľa počiatku sústavy súradníc

Inverzná – funkcia súmerná s danou funkciou podľa priamky y = x
– funkcia v ktorej sa zamenia premenné *x* a *y*
Zložená – funkcia je daná zápisom: h = ??? = g (f (x)) ; funkciu h nazývame zloženou ak platí:

1. D(h) je množina ∀ x Є D(f), pre ktoré platí: f (x) Є D(g)
2. ∀ x Є D(h) platí: h (x) = g (f (x))

Rekurentý vzťah – je vzťah, ktorý udáva n-tý člen pomocou n-1vého člena
Postupnosť daná rekurentne – daný je 1. člen ∨ niekoľko prvých členov postupnosti a pre ďalšie členy je daný predpis ako určíme člen a_{n+1} ,

2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť

Lineárna funkcia – funkcia s predpisom $y = a.x + b$; $a = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow a > 0$ – rastúca , $a < 0$ – klesajúca

– grafom je priamka rovnobežná s priamkou $y = a.x$
– os y pretína v bode [0,b]
– je jednoznačne určená predpisom, grafom, alebo dvoma bodmi

Smernica priamky – tg φ, udáva tangens uhla, ktorý zviera priamka s osou x

Kvadratická funkcia – funkcia s predpisom $y = a.x^2 + b.x + c$

– členy: a – kvadratický; b – lineárny; c – absolútny
– grafom je parabola s osou rovnobežnou s osou y
– vrchol je v bode $\left[\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$; os x pretína v bodoch $\left[\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right], \left[\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right]$

Dotyčnica paraboly:

rovnica paraboly	rovnica dotyčnice
p: $(x - m)^2 = 2p(y - n)$	t: $(x - m)(x_0 - m) = p(y + y_0 - 2n)$
p: $(x - m)^2 = -2p(y - n)$	t: $(x - m)(x_0 - m) = -p(y + y_0 - 2n)$
p: $(y - n)^2 = 2p(x - m)$	t: $(y - n)(y_0 - n) = p(x + x_0 - 2m)$
p: $(y - n)^2 = 2p(x - m)$	t: $(y - n)(y_0 - n) = -p(x + x_0 - 2m)$

Aritmetická postupnosť – postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva aritmetická ak ∃ také číslo d (diferencia), d Є R, že pre ∀ n Є N $a_{n+1} = a_n + d$

Diferencia aritmetickej postupnosti – rozdiel členov a_{n+1} a a_n

Vzťahy aritmetickej postupnosti:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_r = a_s + (r-s)d$$
$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Dôkazy vzťahov AP:

1; $a_n = a_1 + (n-1)d$

Dôkaz: matematická indukcia

1.V(1): $a_1 = a_1 + (1-1)d$
$a_1 = a_1$

2. V(k): $a_k = a_1 + (k-1)d$
V(k + 1): $a_k = a_1 + kd$

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd - d + d = a_1 + kd$$

2; $a_r = a_s + (r-s)d$

Dôkaz:

$$a_r = a_1 + (r-1)d \; ; \; a_s = a_1 + (s-1)d$$
$$a_r - a_s = a_1 + rd - d - a_1 - sd + d$$
$$a_r = a_s + (r-s)d$$

3; $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Dôkaz:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$s_n = a_1 + [a_1 + d] + \ldots + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d]$$
$$s_n = [a_1 + (n-1)d] + [a_1 + (n-2)d] + \ldots + [a_1 + d] + a_1$$
$$2.s_n = [a_1 + a_1 + (n-1)d] + [a_1 + d + a_1 + (n-2)d] + \ldots + [a_1 + (n-1)d + a_1]$$
$$2.s_n = [a_1 + a_n] + [a_1 + a_n] + \ldots + [a_1 + a_n] + [a_1 + a_n]$$
$$2.s_n = n[a_1 + a_n]$$
$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

2.3 Mnohočleny a mocninové funkcie, lineárna lomená funkcia

N-tá odmocnina – číslo a pre ktoré platí: $a^n = b$; a, n, b Є R
Vzťahy pre odmocniny a mocniny:

$$x^{r+s} = x^r . x^s \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$$

$$(x^r)^s = x^{r.s} \qquad (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

$$(xy)^r = x^r y^r \qquad \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

$$\frac{1}{x^r} = x^{-r}$$

N-tá mocnina - a^n; $a^n = a.a.a.....a$ }n-krát; a – základ; n – exponent
Polynóm – celistvý algebraický výraz $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$; $a_0 - a_n$ Є R = koeficienty

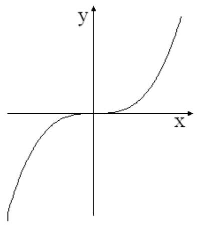
– n – stupeň polynómu
– a_0 - absulútny člen
– polynóm *n*-tého stupňa má najviac *n* rôznych koreňov
– polynóm nepárneho stupňa má aspoň 1 reálny koreň

Mnohočlen – je výraz, ktorý obsahuje viac premenných

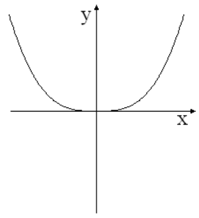
Mocninová funkcia:

a) s prirodzeným exponentom – každá funkcia s predpisom $y = x^n$ n Є N (exponent)

1. n = 1 => lineárna funkcia
2. n je nepárne



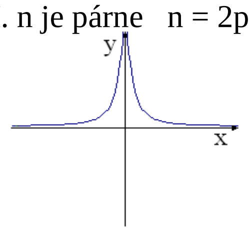
3. n je párne



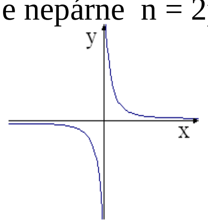
b) s celým exponentom – $y = x^k$ k Є Z

1. k = 0 => $y = x^0 = 1$ => konštantná funkcia
2. k < 0 k Є Z^- => $y = x^k = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; n Є N

I. n je párne n = 2p $y = \frac{1}{x^{2p}}$



II. n je nepárne n = 2p + 1 $y = \frac{1}{x^{2p+1}}$

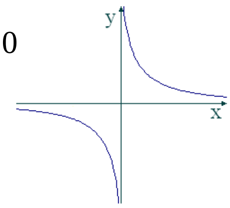


Koeficient pri *n*-tej mocnine (*v polynomickej funkcii*) – a_n Є R v mnohočlene, udáva početnosť výskytu n-tého člena mnohočlena

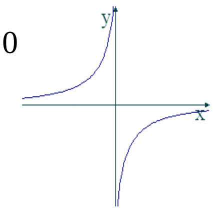
Lineárna lomená funkcia – funkcia s predpisom $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ a,b,c,d Є R ; c ≠ 0 ; ad – bc ≠ 0

– nepriama úmernosť – $y = \frac{k}{x}$

1. k > 0



2. k < 0

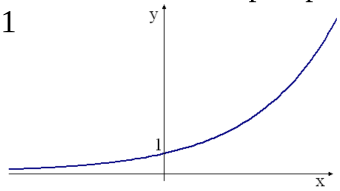


– grafom je rovnoosá hyperbola
– lomená funkcia

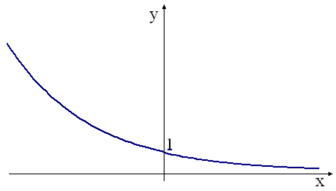
2.4 Logaritmické a exponenciálne funkcie, geometrická postupnosť

Exponenciálna funkcia – funkcia daná predpisom $y = a^x$ $a > 0$, $a \neq 1$ a – základ funkcie

– graf: 1; $a > 1$

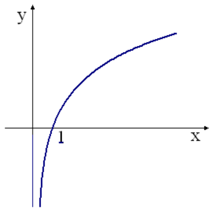


2; $a \in (0,1)$

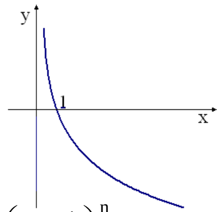


Logaritmická funkcia – inverzná funkcia k exponenciálnej $y = \log_a x$ $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$

– graf: 1; $a > 1$



2; $a \in (0,1)$



Číslo e – Eulerovo číslo – také číslo, pre ktoré: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828...$

Logaritmus – funkcia s predpisom $y = \log_z x$, pričom platí $z^y = x$; a (základ) $\in R^+ - \{1\}$, $x \in R$

Prirodzený logaritmus – logaritmus zo základom e (Eulerovo číslo), predpis: $y = \ln x$

Geometrická postupnosť – postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva geometrická ak $\exists$ také číslo q (kvocient), $q \in R$, že pre $\forall\, n \in N$ $a_{n+1} = a_n \cdot q$

Kvocient geometrickej postupnosti – podiel členov a_{n+1} a a_n

Vzťahy geometrickej postupnosti: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

$$q \neq 1 \Rightarrow s_n = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1\frac{1 - q^n}{1 - q} \;;\; q = 1 \Rightarrow s_n = a_1.n$$

Dôkazy vzťahov GP:

1; $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Dôkaz:

$$1.V(1):\ a_1 = a_1.q^{1-1} = a_1.1 = a_1$$

$$2.V(k):\quad a_k = a_1.q^{k-1}$$

$$V(k+1):\quad a_{k+1} = a_k.q = a_1.q^{k-1}.q = a_1.q^k$$

2; $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$

Dôkaz:

$$a_r = a_1.q^{r-1};\ a_s = a_1.q^{s-1}$$

$$\frac{a_r}{a_s} = \frac{a_1.q^{r-1}}{a_1.q^{s-1}} = q^{r-1-s+1} = q^{r-s}$$

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

3; $s_n = a_1\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

Dôkaz:

(alebo mat. indukciou)

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n = a_1 + a_1.q + ... + a_1.q^{n-2} + a_1.q^{n-1}$$

$$s_n = a_1.(1 + q^1 + ... + q^{n-2} + q^{n-1}).\frac{q-1}{q-1}$$

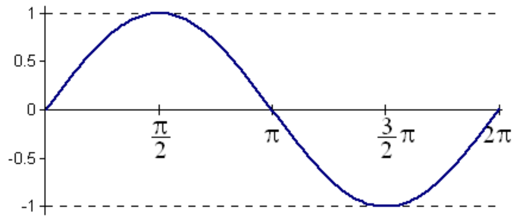
$$s_n = \frac{a_1.(q^1 + q^2 ... + q^{n-1} + q^n - q^0 - q^1 - ... - q^{n-2} - q^{n-1})}{q - 1}$$

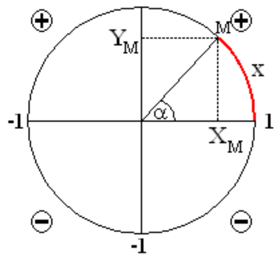
$$s_n = \frac{a_1.(q^n - q^0)}{q - 1} = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

2.5 Goniometrické funkcie

Číslo *π* – 3,141592654..., číslo ktoré určuje obvod jednotkovej polkružnice
Radián – uhol, ktorého ramená na kružnici s polomerom 1 vytnú oblúk, ktorý má dĺžku 1
Goniometrická funkcie – spoločný názov pre funkcie sínus, kosínus, tangens a kotangens
Sínus – x ∈ R, $M[X_M, Y_M]$ je bod jednotkovej kružnice, ktorý je priradený číslu x v zobrazení U, funkcia

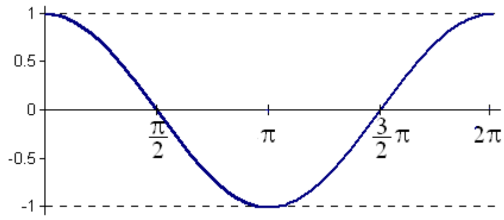
sin x je funkcia, ktorá každému číslu x priradí Y_M
– pomer protiľahlej odvesny ku prepone
– vlastnosti: D(f) = R
H(f) = ⟨-1,1⟩
nie je prostá
nepárna => sin(-x) = -sin x
R: x ∈ $\left\langle\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right\rangle$
K: x ∈ $\left\langle\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right\rangle$
ohraničená: h = 1; d = -1
max: $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$; min: $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$
periodická s p = 2π

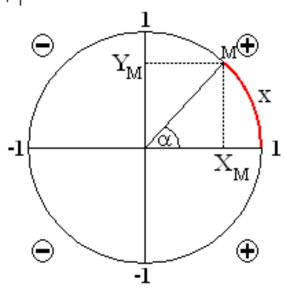




Kosínus – x ∈ R, $M[X_M, Y_M]$ je bod jednotkovej kružnice, ktorý je priradený číslu x v zobrazení U, funkcia

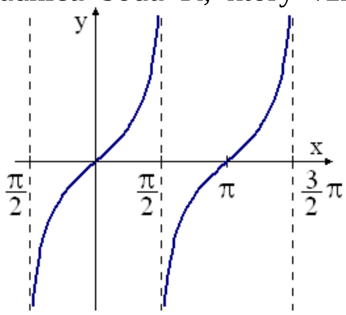
cos x je funkcia, ktorá každému číslu x priradí X_M
– pomer priľahlej odvesny ku prepone
– vlastnosti: D(f) = R
H(f) = ⟨-1,1⟩
nie je prostá
párna => cos(-x) = cos x
R: x ∈ $\langle(\pi+2k\pi),(2\pi+2k\pi)\rangle$
K: x ∈ $\langle 0+2k\pi;\pi+2k\pi\rangle$
ohraničená: h = 1; d = -1
max: $x = 2k\pi$; min: $x=(2k+1)\pi$
periodická s p = 2π

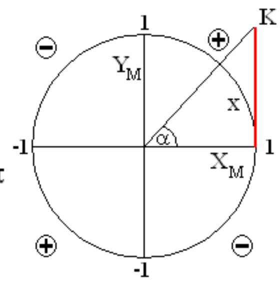




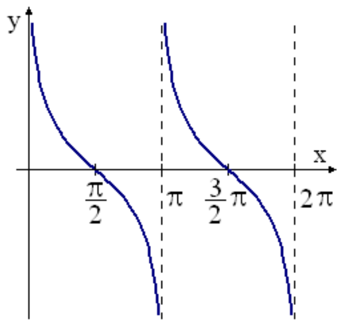
Tangens – pod tangensom čísla x rozumieme y-ovú súradnicu bodu K, ktorý vznikne ako priesečník priamok p: x = 1 a ramena uhla α

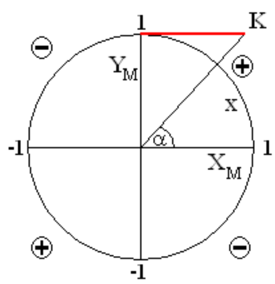
– pomer protiľahlej odvesny ku priľahlej odvesne
– vlastnosti: D(f) = R - $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$
H(f) = R
nepárna s periódou π
rastúca na celom D(f)





Cotangens – pod cotangensom čísla x rozumieme x-ovú súradnicu bodu K, ktorý vznikne ako priesečník priamok p: y = 1 a ramena uhla α
– pomer priľahlej odvesny ku protiľahlej odvesne
– vlastnosti: D(f) = R - $\{\pi+k\pi\}$
H(f) = R
nepárna s periódou π
klesajúca na celom D(f)





2.6 Limita a derivácia, geometrický rad

Limita postupnosti a funkcie – nech f je funkcia definovaná v okolí bodu *a*, prípadne okrem bodu *a*, potom funkcia f má v bode *a* limitu L, ak k ľubovoľnému bodu L, ∃ okolie bodu *a* tak, že pre ∀ x Є okoliu *a*, x ≠ *a*, platí: f(x) Є okoliu L

Okolie bodu – okolím bodu *a* rozumieme interval O(*a*) = (*a* – r, *a* + r), kde r Є R^+; r - polomer okolia *a*

Nevlastná limita – je limita v bodoch ± ∞

Spojitá funkcia – funkcia je spojitá v bode x_0 ak platí: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Derivácia funkcie – ak je funkcia definovaná v okolí bodu x_0 a ∃ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, potom túto limitu označujeme $f'(x_0)$ a nazývame ju deriváciou funkcie f v bode x_0

Dotyčnica ku grafu funkcie v danom bode – má rovnicu: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Stacionárny bod funkcie – je bod pre ktorý platí: $f'(x_0) = 0$

– funkcia má v bode x_0 lokálny extrém

Druhá derivácia funkcie – je deriváciou prvej derivácie danej funkcie

Geometrický rad – ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je goemetrická, tak hovoríme o nekonečnom geometrickom rade a má tvar $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + ... + a_1.q^{n-1} + ...$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$

Kvocient geometrického radu – podiel členov a_{n+1} a a_n

Konvergentný a divergentný geometrický rad – ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je GP s kvocientom q, tak nekonečný geometrický rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, |q| < 1 je konvergentný (má limitu) a jeho súčet sa rovná $\frac{a_1}{1-q}$

– nech postupnosť a_n je geometrická postupnosť s kvocientom q, |q| < 1, potom postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, pričom $s_n = a_1 + a_2 + .. + a_{n-1} + a_n$, je konvergentná a platí, že $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}$

Dôkaz: $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

|q| < 1 => GP ktorú vytvoríme ako $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná

$\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ => $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{q-1} \lim_{n \to \infty} q^n - 1 = \frac{a_1}{q-1} (\lim_{n \to \infty} q^n - \lim_{n \to \infty} 1) = \frac{a_1}{q-1}(0 - 1) =>$$

$$=> \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}$$

– Ak GP $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_1 \neq 0 \wedge |q| \geq 1$, tak $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, pričom $s_n = a_1 + a_2 + .. + a_{n-1} + a_n$ je divergentná

2.7 Integrálny počet

Neurčitý integrál – je ľubovoľná primitívna funkcia k funkcii f

Primitívna funkcia – nech funkcia f je definovaná na definičnom obore D(f) a nech (a,b) Є D(f); funkciu F nazveme primitívnou funkciou k funkcii f na intervale (a,b), ak ∀ x Є (a,b): F′ = f(x)

Integračná konštanta – nech F a G sú primitívne funkcie k funkcii f na intervale (a,b), potom F a G sa líšia o konštantu, ktorá sa nazýva integračná

(Riemannov) Určitý integrál – obsah množiny E{[x,y], a ≤ x ≤ b; 0 ≤ y ≤ f(x)}

Plocha ohraničená grafmi funkcií – sa vypočíta pomocou určitého integrálu $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

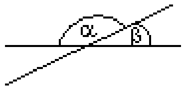
Newtonov-Leibnizov vzorec – nech f je spojitá na intervale ⟨a,b⟩ a nech funkcia F je primitívna k funkcii f na intervale ⟨a,b⟩, potom $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

3. Planimetria

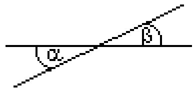
3.1 Základné rovinné útvary

Uhol: nulový : $\alpha = 0°$, ostrý: $\alpha \in (0°,90°)$, pravý: $\alpha = 90°$, tupý: $\alpha \in (90°,180°)$, priamy: $\alpha = 180°$
nekonvexný: $\alpha \in (180°,360°)$

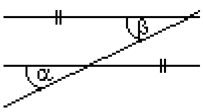
<u>susedné uhly:</u> $\alpha + \beta = 180°$



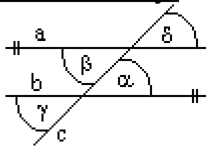
<u>vrcholové uhly:</u> $\alpha = \beta$



<u>súhlasné uhly:</u> $\alpha = \beta$; $a \parallel b$

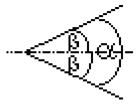


<u>striedavé uhly:</u> $\alpha = \beta$; $\gamma = \delta$; $a \parallel b$

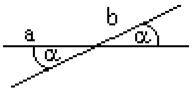


Os úsečky - priamka kolmá na úsečku prechádzajúca jej stredom
- množina V bodov roviny, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od oboch krajných bodov úsečky

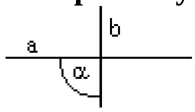
Os uhla - množina V bodov vo vnútri uhla, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od oboch hraničných polpriamok tohto uhla
- polpriamka, ktorá rozdeľuje uhol na 2 rovnaké uhly



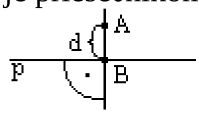
Uhol dvoch priamok: $\alpha \in \langle 0°,90° \rangle$



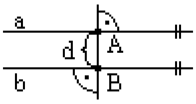
Kolmé priamky: -ich uhol je 90°



Kolmica - na danú priamku je ľubovoľná priamka, ktorá s ňou zviera uhol 90°
Vzdialenosť dvoch bodov - veľkosť úsečky, ktorú tieto body určujú
Vzdialenosť bodu od priamky - vzdialenosť bodu A od priamky p je vzdialenosť bodu A od bodu B, ktorý je priesečníkom priamky p s kolmicou na priamku p, ktorá prechádza bodom A

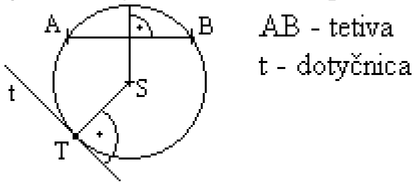


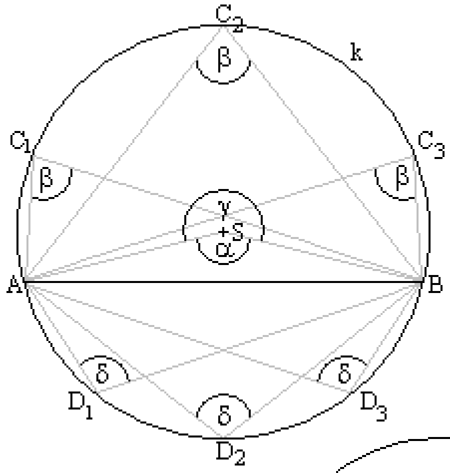
Vzdialenosť rovnobežných priamok - vzdialenosť ich priesečníkov s ľubovoľnou kolmicou na priamky



Kružnica - množina V bodov v rovine, ktorých vzdialenosť od daného bodu S je rovná číslu $r \in R$
Kruh - množina V bodov v rovine, ktorých vzdialenosť od daného bodu S je menšia, alebo rovná číslu $r \in R$
Polomer - úsečka spájajúca ľubovoľný bod kružnice s jej stredom
Priemer - najväčšia možná vzdialenosť dvoch bodov kružnice, $d = 2.r$
- úsečka dĺžky $d = 2.r$, ktorej stred je stredom kružnice

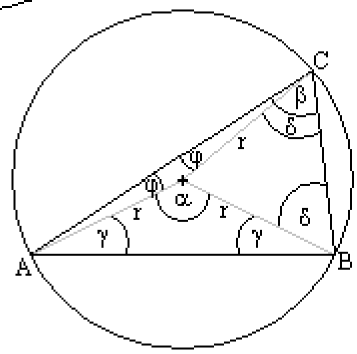
Tetiva - úsečka určená ľubovoľnými dvoma bodmi kružnice
Kružnicový oblúk - súvislá časť kružnice ohraničená dvoma jej bodmi
Dotyčnica - priamka, ktorá má s kružnicou práve jeden spoločný bod
Sečnica - priamka, ktorá má s kružnicou dva spoločné body
Nesečnica - priamka, ktorá nemá s kružnicou spoločný bod
Každá tetiva - je kolmá na ten polomer kružnice, ktorý prechádza stredom tejto tetivy
Každá dotyčnica - je kolmá na ten polomer kružnice, ktorý prechádza dotykovým bodom





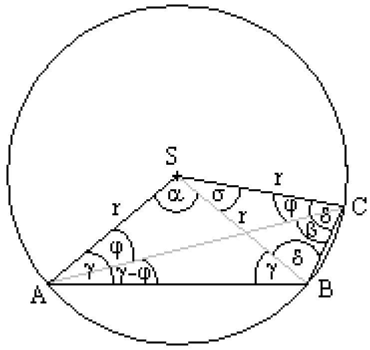
__Na osi každej tetivy leží stred kružnice__

AB = tetiva
S = stred kružnice k
α, γ – stredové uhly
β, δ – obvodové uhly
$\beta = \frac{\alpha}{2}$; $\delta = \frac{\gamma}{2}$
$C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, \ldots \in k - \{A,B\}$

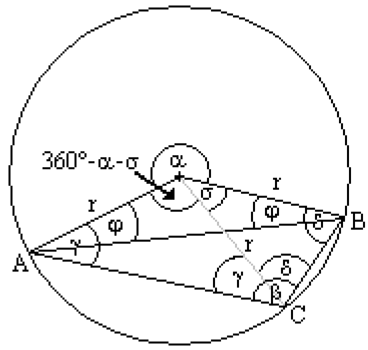


__1. prípad:__
Dôkaz: trojuholníky ABS, BSC a CSA sú rovnoramenné
Platí: $\alpha + 2\gamma = 180°$; $2\varphi + 2\delta + 2\gamma = 180°$
$\beta + 2\gamma + \delta + \varphi = 180°$

$\varphi + \delta + \gamma = 90°$
$\beta + \gamma + \varphi + \delta + \gamma = 180°$ => $\beta + \gamma = 90°$ => $\gamma = 90° - \beta$
$\alpha + 2(90° - \beta) = 180°$ => $\alpha + 180° - 2\beta = 180°$ => $\beta = \frac{\alpha}{2}$

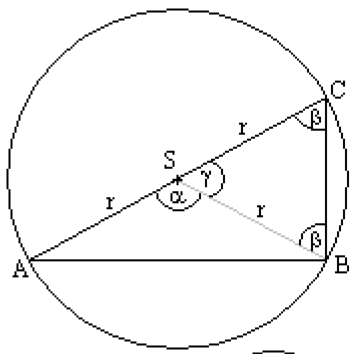


__2.prípad:__
Platí: $\alpha + 2\gamma = 180°$; $\beta + \gamma - \varphi + \delta + \gamma = 180°$
$\alpha + \sigma + 2\gamma = 180°$; $\sigma + 2\delta = 180°$
$\sigma = 180° - 2\delta$
$\alpha + 180° - 2\delta + 2\varphi = 180°$
$\varphi = \delta - \frac{\alpha}{2}$; $2\gamma = 180° - \alpha$
$\beta + 2\gamma + \delta - \delta + \frac{\alpha}{2} = 180°$
$\beta + 180° - \alpha + \frac{\alpha}{2} = 180°$ => $\beta = \frac{\alpha}{2}$



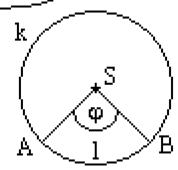
__3.prípad:__
Platí: $360° - \alpha + 2\varphi = 180°$; $\sigma + 2\delta = 180°$
$360° - \alpha - \sigma + 2\gamma = 180°$; $\beta = \gamma + \delta$

$360° - \alpha + 2\varphi - 360° + \alpha + \sigma - 2\gamma = 180° - 180°$
$\sigma = 2\gamma - 2\varphi$
$2\gamma - 2\varphi + 2\delta = 180°$; $\gamma + \delta = 90° + \varphi = \beta$
$2\varphi = \alpha - 180°$; $\varphi = \frac{\alpha}{2} - 90°$
$\beta = 90° + \frac{\alpha}{2} - 90°$ => $\beta = \frac{\alpha}{2}$



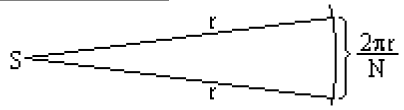
__4.prípad:__
$\alpha + \gamma = 180°$
$2\beta + \gamma = 180°$
$\alpha = 2\beta$
$\beta = \frac{\alpha}{2}$

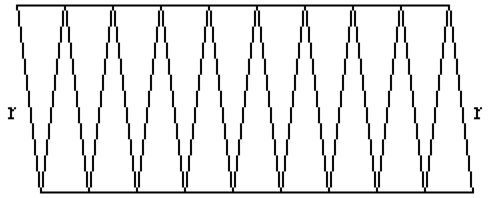
Obvod kruhu: $O = 2\pi r = \pi d$; $\pi = 3{,}141592654$
Dĺžka kružnicového oblúka: $l = 2\pi r * \varphi/2\pi = \varphi r$; φ je stredový uhol tetivy AB v oblúkovej miere ak $[\varphi] = °$ ➔ $l = 2\pi r * \varphi/360°$



Kruhový výsek - prienik kruhu a uhlu s vrcholom v strede kruhu
Kruhový odsek - prienik kruhu a polroviny, ktorej hraničná priamka má s kruhom viac ako 1 spoločný bod
Medzikružie - množina bodov, pre ktorých vzdialenosť od daného stredu platí: $r \leq |SX| \leq R$

Obsah kruhu: Rozdelíme kruh na malé rovnoramenné trojuholníky (ich počet je N)





$$\frac{2\pi.r}{N}\frac{N}{2} = \pi r$$

Tieto trojuholníky poskladáme do rovnobežníka
Pre veľké N je výška rovnobežníka rovná r

S = π r²

Obsah kruhového výseku: $S = \pi.r^2 \dfrac{\varphi}{2\pi} = \varphi \dfrac{r^2}{2}$ $[\varphi]$ = rad

Kružnica je jednoznačne určená:

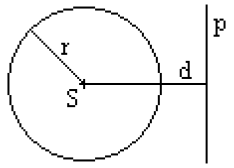
1. stredom a polomerom
2. 3 bodmi ležiacimi na tejto kružnici (kružnica opísaná trojuholníku)

Talesova veta - obvodový uhol nad priemerom kružnice je pravý

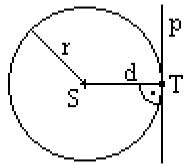
Vzájomná poloha kružnice a priamky:

nech d = |S,p| ; S je stred kružnice k s polomerom r

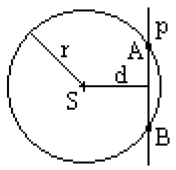
1. d > r
p je nesečnica
pre bod X Є k platí
|SX| = r
pre bod X Є p platí
|SX| ≥ d ➔ |SX| > r
➔ p ∩ k = ∅



2. d = r ➔ dotyčnica
X Є k : |SX| = r
X Є p : |SX| ≥ d
➔ |SX | ≥ r ➔
p ∩ k = {T}



3. d < r => sečnica
X Є k : |SX| = r
X Є p : |SX| ≥ d
➔∃ X Є p: |SX| = r
➔ p ∩ k = {A,B}



Vzájomná poloha dvoch kružníc:

k_1 (S_1,r_1) ; k_2 (S_2,r_2) ; $d = |S_1S_2|$

1. $d > (r_1+r_2)$ ➔ $k_1 \cap k_2 = \emptyset$**; nemajú spoločný bod**

2. $d = (r_1+r_2)$ ➔ $k1 \cap k_2 = \{T\}$**; 1 spoločný bod,vonkajší dotyk**

3. $|r_1-r_2| < d < (r_1+r_2)$ ➔ $k_1 \cap k_2 = \{A,B\}$**; 2 spoločné body**

4. $d = |r_1-r_2|$ ➔ $k_1 \cap k_2 = \{T\}$**; 1 spoločný bod, vnútorný dotyk**

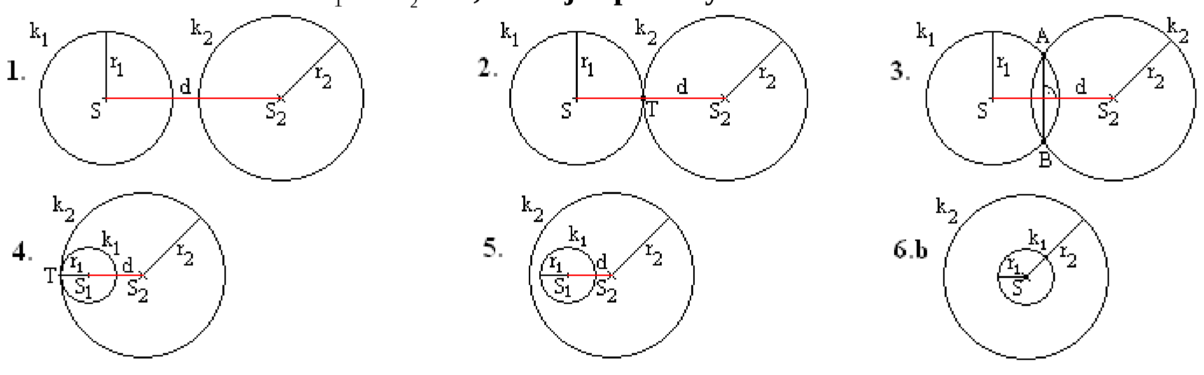
5. $0 < d < |r_1-r_2|$ ➔ $k_1 \cap k_2 = \emptyset$**; nemajú spoločný bod**

6. $d=0$ ➔ $S_1=S_2$ **a) ak** $r_1=r_2$ ➔ **kružnice sú totožné**

$k_1=k_2 = k_1 \cap k_2$

b) ak $r_1 \neq r_2$ ➔ **sústredné kružnice**

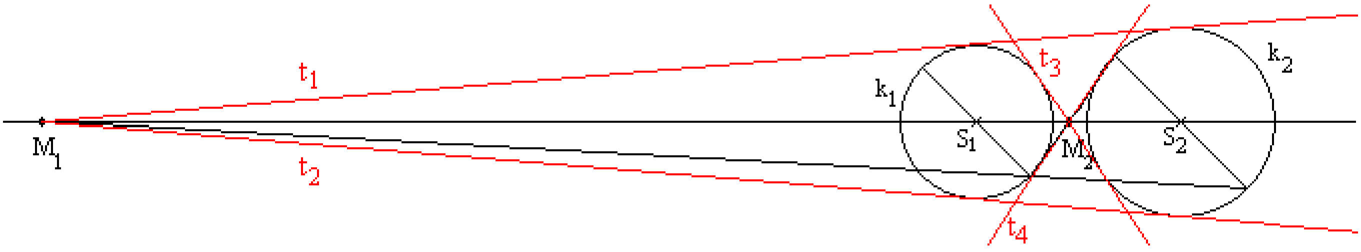
$k_1 \cap k_2 = \emptyset$**; nemajú spoločný bod**



Spoločné dotyčnice dvoch kružníc - prechádzajú stredom rovnoľahlosti

t_1, t_2 - vonkajšie spoločné dotyčnice

t_3, t_4 - vnútorné spoločné dotyčnice



- ak sa kružnice pretínajú v dvoch bodoch, nemajú vnútorné spoločné dotyčnice
- ak majú kružnice vonk.dotyk ∃ len jedna vnútorná spoločná dotyčnica, ktorá je kolmá na spojnicu stredov kružníc
- ak majú kružnice vnútorný dotyk, ∃ len jedna spoločná dotyčnica, ktorá je kolmá na spojnicu stredov kružníc
- ak je jedna kružnica vnútri druhej, nemajú spoločnú dotyčnicu
- ak majú kružnice rovnaký polomer a nie sú totožné, sú ich vonkajšie spoločné dotyčnice rovnobežné so spojnicou stredov kružníc

Trojuholník: - prienik polrovín ABC, BCA a CAB
- prienik konvexného uhla a polroviny
- zjednotenie úsečiek AX; X Є BC

1.ostrouhlý: $\alpha,\beta,\gamma \in (0°,90°)$

2.pravouhlý: $[\alpha = 90° \wedge \beta,\gamma \in (0°,90°)] \vee [\beta = 90° \wedge \alpha,\gamma \in (0°,90°)] \vee [\gamma = 90° \wedge \alpha,\beta \in (0°,90°)]$

3.tupouhlý: $[\alpha \in (90°,180°) \wedge \beta,\gamma \in (0°,90°)] \vee \ldots$

4.rovnoramenný: $(a = b) \vee (b = c) \vee (a = c)$

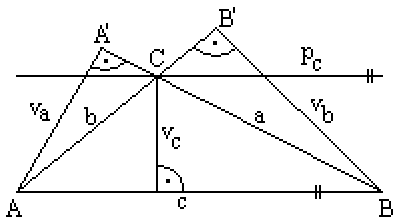
5.rovnostranný: $a = b = c$

- vrcholy: A,B,C
- strany: $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$

výšky: AA′ = výška na stranu a

A′= päta výšky

$|AA'| = v_a$



Trojuholníková rovnosť: $(a + b > c) \wedge (b + c > a) \wedge (a + c > b)$

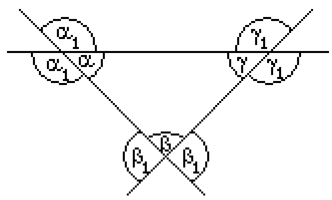
Uhly trojuholníka: Vnútorné uhly: α,β,γ ; $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Vonkajšie uhly: $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$

$\alpha_1 = 180° - \alpha = \beta + \gamma$

$\beta_1 = 180° - \beta = \alpha + \gamma$

$\gamma_1 = 180° - \gamma = \alpha + \beta$



Ťažnice: S_a, S_b, S_c sú stredy strán

AS_a – ťažnica

$|AS_a| = t_a$

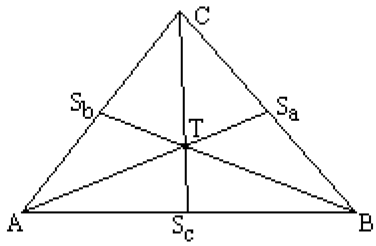
$AS_a \cap BS_b \cap CS_b = \{T\}$

T – ťažisko trojuholníka

$|AT| = 2.|TS_a|$

$|BT| = 2.|TS_b|$

$|CT| = 2.|TS_c|$



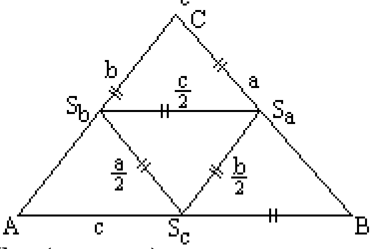
Stredné priečky: S_a, S_b, S_c – stredy strán

S_aS_b, S_bS_c, S_aS_c – stredné priečky

$S_aS_b \parallel AB$

$|S_aS_b| = \frac{1}{2}|AB|$ ➔ vyplýva z rovnoľahlosti

Stredné priečky rozdeľujú ΔABC na 4 zhodné trojuholníky (veta sss)



Kružnica trojuholníku opísaná - prechádza vrcholmi trojuholníka

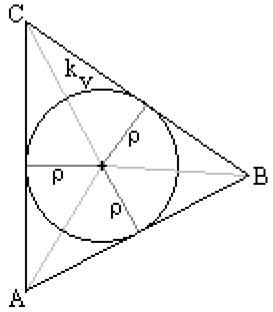
Stred S kružnice – bod, ktorého vzdialenosť od všetkých troch vrcholov trojuholníka je rovnaká

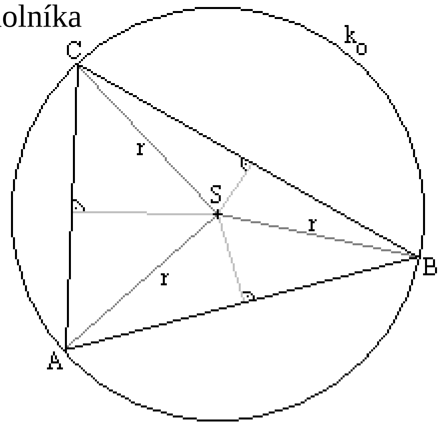
➔ S je priesečník osí strán trojuholníka

Kružnica do trojuholníka vpísaná - dotýka sa strán trojuholníka ; ρ - polomer vpísanej kružnice

Stred S kružnice – bod, ktorého vzdialenosť od všetkých troch strán trojuholníka je rovnaká

➔ S je priesečník osí vnútorných uhlov trojuholníka

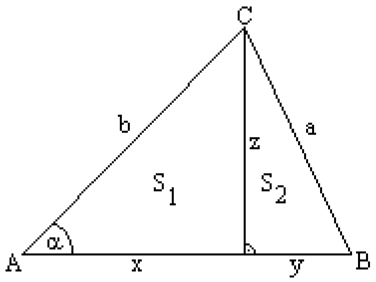




Obvod trojuholníka: O = a + b + c

Obsah trojuholníka: Doplnenie trojuholníkom $\Delta ACD \cong \Delta ABC$ na rovnobežník ABCD

Obsah rovnobežníka: $S' = a.v_a$; Obsah trojuholníka ABC: $S = \frac{1}{2}S'$ => $S = \frac{a.v_a}{2} = \frac{b.v_b}{2} = \frac{c.v_c}{2}$



$x + y = c$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{x.z}{2} = \frac{x.z}{2} + \frac{y.z}{2} = \frac{z}{2}(x+y) = \frac{c.z}{2}$$

$\sin\alpha = \frac{z}{b}$; $S = \frac{c.b.\sin\alpha}{2}$

$$S = \frac{c.b.\sin\alpha}{2} = \frac{a.c.\sin\beta}{2} = \frac{a.b.\sin\gamma}{2}$$

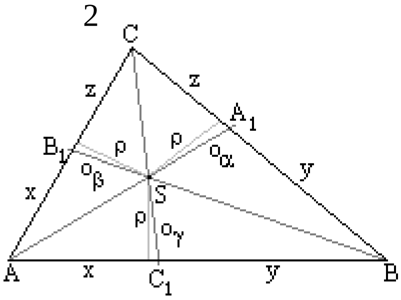
$|AB_1| = |AC_1| = x$ vyplýva to z osovej

$|BC_1| = |BA_1| = y$ súmernosti podľa

$|CA_1| = |CB_1| = z$ osi o_α, o_β, resp o_γ

$2x + 2y + 2z = O = a + b + c$

$x + y + z = \frac{a+b+c}{2} = s$



$$S = S_{ABS} + S_{BCS} + S_{ACS} = \frac{(x+y)\rho}{2} + \frac{(y+z)\rho}{2} + \frac{(x+z)\rho}{2} = \frac{2x+2y+2z}{2}.\rho = s.\rho = \frac{\rho}{2}(a+b+c)$$

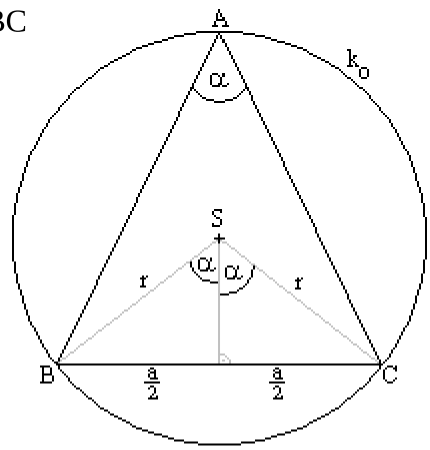
Sínusová veta - Obvodový uhol: α ; Stredový uhol: 2α ➔ tetiva BC

$\sin\alpha = \frac{a}{2}.\frac{1}{r} \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = 2r$

podobne: $\frac{b}{\sin\beta} = 2r; \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$

- oproti väčšej strane je väčší uhol



Kosínusová veta – Pytagorova veta: $x^2 + v_c^{\,2} = b^2$

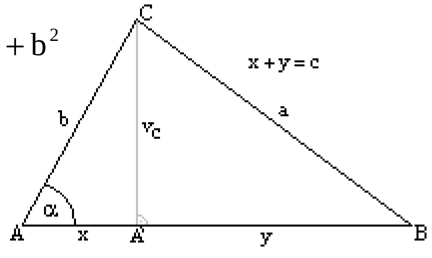
$y^2 + v_c^{\,2} = a^2$

$$a^2 = y^2 + v_c^{\,2} = (c-x)^2 + v_c^{\,2} = c^2 - 2cx + x^2 + v_c^{\,2} = c^2 - 2cx + b^2$$

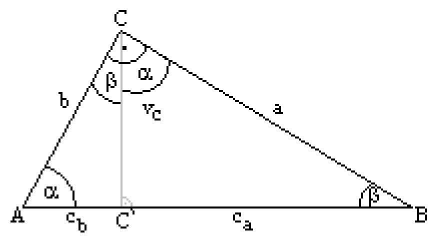
$\cos\alpha = \frac{x}{b}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

podobne: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



Pravouhlý trojuholník: $\gamma = 90°$; $\alpha + \beta = 90°$; a je výška na stranu b a naopak



Pytagorova veta: $a^2 + b^2 = c^2$

Goniometria: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

Euklidove vety: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c} \Rightarrow v_c{}^2 = c_a.c_b$

$$a^2 = c_a{}^2 + v_c{}^2 = c_a(c_a + c_b) = a^2 = c.c_a$$

$$b^2 = c_b{}^2 + v_c{}^2 = c_b(c_a + c_b) = b^2 = c.c_b$$

alebo: $\cos\alpha = \frac{c_b}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = c.c_b$

$$\cos\beta = \frac{c_a}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = c.c_a$$

Vety o zhodnosti trojuholníkov - dva trojuholníky sú zhodné, ak:

1. majú rovnaké všetky tri dĺžky strán (veta sss)
2. majú rovnaké dve dvojice strán a uhly, ktoré tieto strany zvierajú (veta sus)
3. majú rovnakú jednu dvojicu strán a obidve dvojice uhlov pri vrcholoch, ktoré sú krajnými bodmi zhodných strán (veta usu)
4. majú rovnaké dve dvojice strán a uhly oproti väčšej z nich (veta Ssu)

Vety o podobnosti trojuholníkov - trojuholníky ABC a A′B′C′ sú podobné, ak:

1. $a' = k.a \wedge b' = k.b \wedge c' = k.c$, kde $k \in R+$ (veta sss)
2. $a' = k.a \wedge b' = k.b$, kde $k \in R+ \wedge \gamma' = \gamma$ (veta sus)
3. $\alpha' = \alpha \wedge \beta' = \beta$ {podobne(α, γ) a (β, γ)} (veta uu)

Podobné trojuholníky:

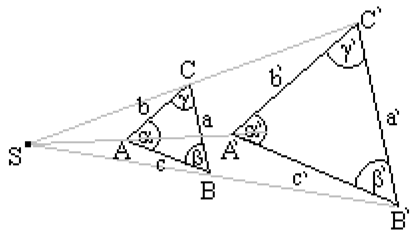
pomer podobnosti: $k \in R - \{0\}$

$a' = |k|.a$; $b' = |k|.b$; $c' = |k|.c$

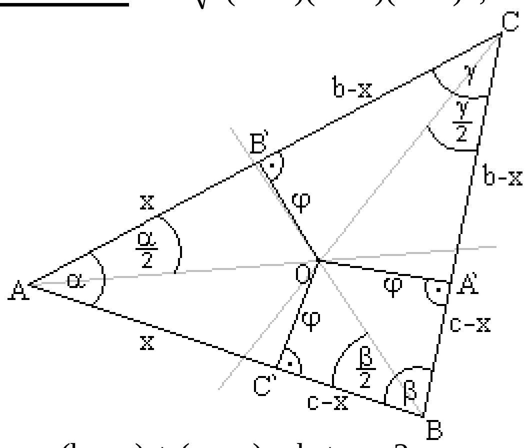
$|X'Y'| = |k|.|XY|$

$\alpha' = \alpha$; $\beta' = \beta$; $\gamma' = \gamma$

$$S = \frac{a.v_a}{2};\ S' = \frac{a'.v'_a}{2} = \frac{|k|.a.|k|.v_a}{2} = k^2.S$$



Heronov vzťah: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; kde $s = \frac{a+b+c}{2}$



O – stred vpísanej kružnice

φ – polomer vpísanej kružnice

$|AC'| = |AB'| = x$

($\Delta AOC' \approx \Delta AOB'$ - veta Ssu)

$|BC'| = |BA'| = c - x$

($\Delta BOC' \approx \Delta BOA'$ - veta Ssu)

$|CA'| = |CB'| = b - x$

($\Delta COA' \approx \Delta COB'$ - veta Ssu)

$a = (b - x) + (c - x) = b + c - 2x$

$2x = b + c - a \Rightarrow x = \frac{b+c-a}{2} = \frac{b+c+a-2a}{2} = \frac{a+b+c}{2} - a = s - a$

$$\cot g\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{\varphi} = \frac{s-a}{\varphi}$$

$$\cot g\frac{\beta}{2} = \frac{c-x}{\varphi} = \frac{c-s+a}{\varphi} = \frac{a+b+c-b-s}{\varphi} = \frac{2s-s-b}{\varphi} = \frac{s-b}{\varphi}$$

$$\cot g\frac{\gamma}{2} = \frac{b-x}{\varphi} = \frac{b-s+a}{\varphi} = \frac{a+b+c-c-s}{\varphi} = \frac{2s-s-c}{\varphi} = \frac{s-c}{\varphi}$$

$$\cot g\frac{\alpha}{2}+\cot g\frac{\beta}{2}+\cot g\frac{\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)*}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$ * - súčtový vzorec ➔ sin(x + y) = sin x.cos y + sin y.cos x

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ => $\alpha + \beta = 180° - \gamma$ => $\frac{\alpha+\beta}{2}=90°-\frac{\gamma}{2}$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin(90°-\frac{\gamma}{2})=\sin 90°.\cos\frac{\gamma}{2}-\cos 90°.\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\cot g\frac{\alpha}{2}+\cot g\frac{\beta}{2}+\cot g\frac{\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos(90°-\frac{\gamma}{2})=\cos 90°.\cos\frac{\gamma}{2}+\sin 90°.\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\cot g\frac{\alpha}{2}+\cot g\frac{\beta}{2}+\cot g\frac{\gamma}{2}=\cot g\frac{\gamma}{2}.\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=\cot g\frac{\gamma}{2}.\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=$$

$$=\cot g\frac{\gamma}{2}.\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=\cot g\frac{\alpha}{2}\cot g\frac{\beta}{2}\cot g\frac{\gamma}{2}\quad\Rightarrow\quad \cot g\frac{\alpha}{2}+\cot g\frac{\beta}{2}+\cot g\frac{\gamma}{2}=\cot g\frac{\alpha}{2}.\cot g\frac{\beta}{2}.\cot g\frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{s-a}{\varphi}+\frac{s-b}{\varphi}+\frac{s-c}{\varphi}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{\varphi^3}$$

$$\frac{3s-a-b-c}{\varphi}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{\varphi^3}\quad /.\varphi$$

$$3s-(a+b+c)*=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{\varphi^2}\quad /.\varphi^2$$ * - (a + b + c) = 2s

$$s.\varphi^2=(s-a)(s-b)(s-c)\quad /.s$$

$$s^2.\varphi^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$$ S = s. φ

$$S^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

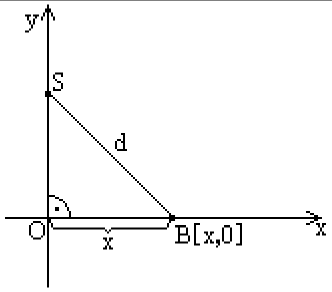
$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ - **ČBTD**

<u>Dotykový bod dvoch kružníc leží na spojnici ich stredov:</u>

Negovaný výrok: ∃ 2 kružnice, ktoré sa dotýkajú v bode neležiacom na spojnici ich stredov

Kružnica je osovo súmerná podľa každej priamky, prechádzajúcej jej stredom, teda aj spojnice jej stredu so stredom inej kružnice => každá dvojica kružníc je osovo súmerná podľa spojnice stredov týchto kružníc.
Ak kružnice majú spoločný bod mimo spojnice stredov, majú spoločný aj druhý bod, ktorý je s nim súmerne združený, čo je spor, pretože dotýkajúce sa kružnice majú spoločný <u>práve jeden bod.</u>

Žiadne tri body kružnice neležia na priamke:



Hľadám tri body B_1, B_2, B_3, ktoré ležia na kružnici k so stredom S a polomerom r a zároveň na priamke p.
Vhodným otočením a posunutím zobrazím priamku p na os x súradnicovej sústavy a stred S kružnice na os y.
Vzdialenosť ľubovoľného bodu B na priamke p (osi x) od stredu S je $d = \sqrt{|SO|^2 + x^2}$ (Pytagorova veta),

kde x = |OB|, B Є k <=> $r = d = \sqrt{|SO|^2 + x^2}$ <=> $r^2 = |SO|^2 + x^2$

(ekvivalentná úprava lebo r, $|SO|^2$ a x^2 sú nezáporné) <=> $x^2 = r^2 - |SO|^2$

1. ak $|SO|^2 > r^2$ <=> $|SO| > r$, potom ne∃ x Є R: $x^2 = r^2 - |SO|^2$

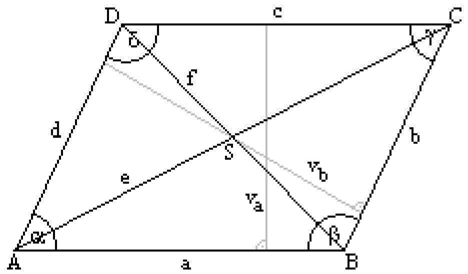
2. ak $|SO| = r$, potom x = 0 ($|SO|$ a r sú pre daný prípad nemenné)

3.ak $|SO| < r$, potom $x = \pm\sqrt{r^2 - |SO|^2}$ ➔ keďže súradnica x jednoznačne určuje bod ležiaci na osi x, existujú najviac 2 body danej kružnice, ktoré ležia na danej priamke

Konvexný mnohouholník M – platí: ∀ A,B Є M : AB Є M
- všetky vnútorné uhly mnohouholníka sú menšie ako 180°

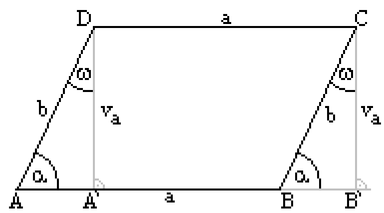
Pravidelný mnohouholník – je mnohouholník s *N* vrcholmi a *N* stranami s rovnakou veľkosťou, ktorého všetky vnútorné uhly sú rovnako veľké
- súčet veľkostí vnútorných uhlov: $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 180°(N-2)$
- veľkosť vnútorného uhla pravidelného N-uholníka: $\alpha = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \frac{1}{N} = \frac{180°}{N}(N-2) = 180°(1 - \frac{2}{N})$

Rovnobežník: AB || CD; BC || AD
- naviac platí: e = |AC|; f = |BD|
  |AB| = a = |CD| = c; |BC| = b; |AD| = d;
  α = γ; β = δ
  |AS| = |SC| = $\frac{e}{2}$; |BS| = |SD| = $\frac{f}{2}$
  O = a + b + c + d = 2(a + b)
- rovnobežník je stredovo súmerný podľa stredu S

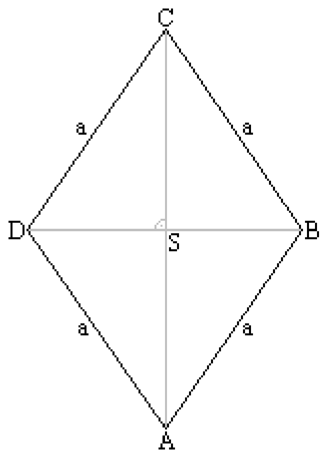


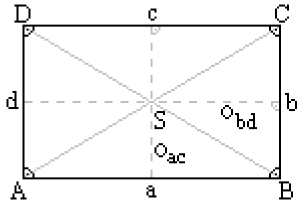
Obsah rovnobežníka:

ΔAA´D ≅ ΔBB´C (veta usu)
ω = 90° - α ; |AA´| = |BB´|
$S_{ABCD} = S_{A'BCD} + S_{BB'C} = S_{A'B'CD} = |AB'|.v_a = a.v_a$
$\sin\alpha = \frac{v_a}{d} \Rightarrow S = a.d.\sin\alpha$



Kosoštvorec – špeciálny prípad rovnobežníka, kde a = b = c = d
- naviac platí: AC ⊥ BD
  AC – os uhlov DAB a BCD
  BD – os uhlov ABC a CDA
  ◊ABCD je súmerný podľa osí AC a BD
  $S = \frac{ef}{2} = \frac{|AC||BD|}{2}$; O = 4a





Obdĺžnik – špeciálny prípad rovnobežníka, kde α = β = γ = δ = 90°

- naviac platí: □ABCD je súmerný podľa osí strán O_{ac} a O_{bd}

  |AC| = e = |BD| = f

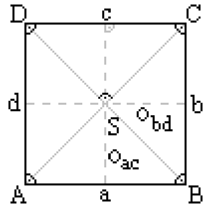
  S = a.b

Dôkaz obsahu obdĺžnika: Rozdelením na štvorce s dĺžkou strany NSD(a,b) = x

Počet štvorcov: $n = \frac{a}{x}.\frac{b}{x} = \frac{ab}{x^2}$

Obsah jedného štvorca: $S_1 = x^2$

Obsah obdĺžnika: $S = N.\,S_1 = \frac{ab}{x^2}.x^2 = a.b$



Štvorec – špeciálny prípad rovnobežníka, kde α = β = γ = δ = 90°

- a = b = c = d
- naviac platí: AC ⊥ BD

  AC – os uhlov DAB a BCD

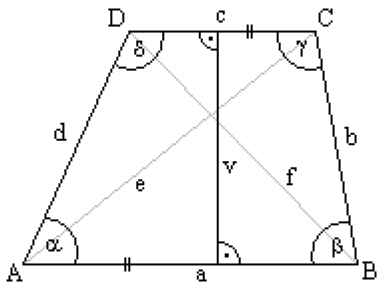
  BD – os uhlov ABC a CDA

  □ABCD je súmerný podľa osí strán O_{ac} a O_{bd} a podľa osí uhlov $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{BD}$

  |AC| = e = |BD| = f

  $S = a^2$ (definovaný) ; O = 4a

Lichobežník – štvoruholník s jednou dvojicou rovnobežných a jednou dvojicou rôznobežných strán



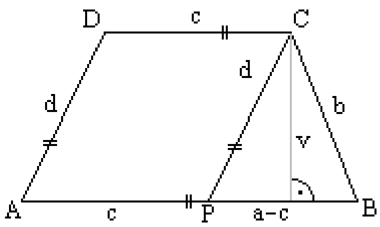
AB, CD – základne
BC, AD – ramená
AB || CD
α + β + γ + δ = 360°
α + δ = β + γ = 180°
v – výška lichobežníka
uhlopriečky : |AC| = e; |BD| = f
O = a + b + c + d

Rovnoramenný lichobežník – lichobežník, ktorý je osovo súmerný podľa spoločnej osi základní

- naviac platí: b = d; e = f

  α = β; γ = δ

Obsah lichobežníka:



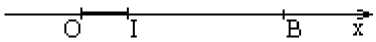
$$S_{ABCD} = S_{APCD} + S_{PBC}$$

$$S = c.v + \frac{1}{2}(a-c).v = c.v + \frac{1}{2}a.v - \frac{1}{2}c.v = \frac{1}{2}c.v + \frac{1}{2}a.v$$

$$S_{ABCD} = \frac{v(a+c)}{2}$$

3.2 Analytická geometria v rovine

Súradnicová sústava na priamke (číselná os): |OI| = 1 O – začiatok súradnicovej sústavy

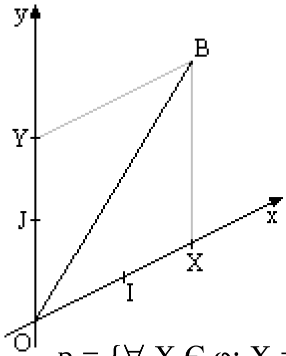


Bod B: OB = x.OI

|OB| = x.|OI| = x.1 = x

B = [x] ; x je súradnica bodu B

Súradnicová sústava v rovine – rovnobežníková sústava súradníc



OX = x.OI OI ∦ OJ

OY = y.OJ

OB = OX + OY = x.OI + y.OJ

B = [x,y] ; x a y sú súradnice bodu B

- ak OI ⊥ OJ, sústava je ORTOGONÁLNA
- ak v ortogonálnej sústave |OI| = |OJ| , tak sústava je ORTONORMÁLNA

Priamka: p = {∀ X Є φ: X = A + k. $\vec{u}$; k Є R}

- X = A + k. $\vec{u}$ - parametrická rovnica priamky v rovine

  A je ľubovoľný bod patriaci priamke, $\vec{u}$ je smerový vektor, k parameter

  $x = x_0 + k.u_1$

  $y = y_0 + k.u_2$ k Є R

  $A = [x_0, y_0]$; $\vec{u} = [u_1, u_2]$

- ak sú dané body A a B, potom X = A + k. $\overrightarrow{AB}$
- ak k Є R ➔ priamka; k Є ⟨0, ∞) ➔ polpriamka $\overset{\mapsto}{AB}$; k Є (–∞,0⟩ ➔ opačná polpriamka k $\overset{\mapsto}{AB}$
- ak k Є (–∞,1⟩ ➔ polpriamka $\overset{\mapsto}{BA}$; k Є ⟨0,1⟩ ➔ úsečka AB ; k = $\frac{1}{2}$ ➔ stred úsečky AB

Všeobecná rovnica priamky v rovine:

nech: $A = [a_1, a_2]$; $\vec{u} = [u_1, u_2]$; t Є R je parameter

X: $x = a_1 + t.u_1 \quad /.(-u_2)$

$y = a_2 + t.u_2 \quad /.u_1$ => (sčítaním) => $u_1.y - u_2.x = u_1.a_2 - u_2 a_1$

$-u_2.x + u_1.y + u_2 a_1 - u_1.a_2 = 0$

p: A.x + B.y + C = 0 ; A,B,C Є R

X = [x,y] Є p

$\vec{n}$ = [A,B] – je to normálový vektor ($\vec{n} \perp \vec{u}$)

$\vec{u}.\vec{n} = u_1.A + u_2.B = u_1.(-u_2) + u_2.u_1 = 0$

Smernicový tvar rovnice priamky:

A.x + B.y + C = 0

B.y = -A.x – C

$$y = \frac{-A}{B}x + \frac{-C}{B}$$

p: y = k.x + q

- ak B = 0 (p: A.x + C = 0), smernicový tvar neexistuje, (φ = 90°)
- k = tg φ k Є R je smernica priamky

  φ Є ⟨0°,180°) je uhol, ktorý zviera priamka s kladným smerom osi x
- q je súradnica bodu [0,q] na osi y, ktorým priemka prechádza

Úsekový tvar rovnice priamky: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

- ak x = p, potom $\frac{x}{p} = 1$ => y = 0; ak y = q, potom $\frac{y}{q} = 1$ => x = 0
- priamka prechádza bodmi [p,0] a [0,q]; (p a q sú všetky úseky, ktoré priamka vytína na osiach)

Vzájomná poloha dvoch priamok v rovine:

- priamka p je určená bodom A a smerovým vektorom $\vec{u}$
- priamka q je určená bodom B a smerovým vektorom $\vec{v}$

<u>1. priamky sú totožné:</u> $p = q$

$\vec{v} = k.\vec{u}$; $k \neq 0$; $k \in R$

$AB = l.\vec{u}$; $l \in R$

$p \cap q = p = q$

<u>2. priamky sú rovnobežné:</u> $p \parallel q$

$\vec{v} = k.\vec{u}$; $k \neq 0$; $k \in R$

$AB \neq l.\vec{u}$; $l \in R$

$p \cap q = \emptyset$

<u>3. priamky sú rôznobežné:</u> $p \nparallel q$

$\vec{v} \neq k.\vec{u}$; $k \neq 0$; $k \in R$

$p \cap q = \{P\}$; P – priesečník p a q

$P = [x_P, y_P]$ - koreň sústavy rovníc popisujúcich priamky p a q

- ak $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$, potom $p \perp q$

---

priamka p je určená rovnicou: $A_1.x + B_1.y + C_1 = 0$

priamka q je určená rovnicou: $A_2.x + B_2.y + C_2 = 0$

1; $p = q$:

$A_2 = k.A_1 \quad k \in R - \{0\}$

$B_2 = k.B_1$

$C_2 = k.C_1$

$p \cap q = p = q$

2; $p \parallel q$:

$A_2 = k.A_1 \quad k \in R - \{0\}$

$B_2 = k.B_1$

$C_2 \neq k.C_1$

$p \cap q = \emptyset$

3; $p \nparallel q$:

$A_2 = k.A_1 \quad k \in R - \{0\}$

$B_2 \neq k.B_1$

$C_2 \neq k.C_1$

$p \cap q = \{P\}$

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 = [A_1, B_1] \\ \vec{u}_2 = [A_2, B_2] \\ \vec{u}_2 = k.\vec{u}_1 \end{pmatrix}$$

---

priamka p je určená rovnicou: $y = k_1.x + q_1$

priamka q je určená rovnicou: $y = k_2.x + q_2$

1; $p = q$:

$k_1 = k_2$

$q_1 = q_2$

$p \cap q = p = q$

2; $p \parallel q$:

$k_1 = k_2$

$q_1 \neq q_2$

$p \cap q = \emptyset$

3; $p \nparallel q$:

$k_1 \neq k_2$

$p \cap q = \{P\}$

špeciálny prípad, keď $p \perp q$: $\quad k_1 = \dfrac{-A_1}{B_1}$; $k_2 = \dfrac{-A_2}{B_2}$; $B_1, B_2 \neq 0$

$$\vec{n}_1 = [A_1, B_1] \perp \vec{n}_2 = [A_2, B_2] \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2 = A_1.A_2 + B_1.B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = \frac{-A_1.A_2}{B_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2 = -A_2 \frac{1}{B_2} = -A_2 \frac{B_1}{-A_1.A_2} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{-1}{k_1}$$

$$\mathbf{p \perp q} \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

Uhol (odchýlka) dvoch priamok:

nech $\beta = \arccos\left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}\right)$ je uhol smerových vektorov priamok

1; ak β Є ⟨0°,90°⟩
uhol priamok je α = β, vtedy
$\cos\alpha = \cos\beta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

cos β ≥ 0

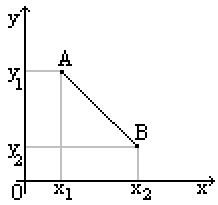
2; ak β Є ⟨90°,180°⟩
uhol priamok je α = 180°- β, vtedy
cos α = cos(180° - β) = cos180°.cos β +
+ sin180°.sin β = $-\cos\beta = -\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

cos β < 0 => cos α = |cos β|

- pre obidva prípady platí: cos α = |cos β|, preto $\alpha = \arccos\left|\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}\right|$

- $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú smerové (príp. normálové) vektory priamok

Vzdialenosť dvoch bodov:



- z Pytagorovej vety: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- veľkosť vektora: $d = |\overrightarrow{AB}| = |B - A| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Vzdialenosť bodu od priamky:

1; - priamka určená bodom A a smerovým vektorom $\vec{u}$
pre bod X Є p platí: $x = a_1 + t.\,u_1$
$y = a_2 + t.\,u_2$
bod B = $[b_1, b_2]$, vektor $\overrightarrow{BX} = X - B = [a_1 + t.u_1 - b_1, a_2 + t.u_2 - b_2]$
vzdialenosť X od B: $d = |\overrightarrow{BX}| = \sqrt{(a_1 + t.u_1 - b_1)^2 + (a_2 + t.u_2 - b_2)^2}$
$a_1, a_2, b_1, b_2, u_1, u_2$ sú dané pod odmocninou ➔ roznásobiť, upraviť na úplný štvorec a posúdiť, kedy bude vzdialenosť d najmenšia (určiť t) => vtedy je d vzdialenosť bodu od priamky

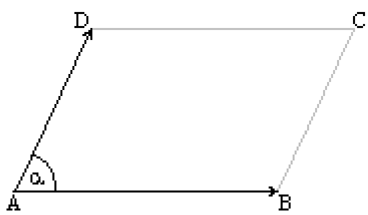
2; - vektor $\overrightarrow{BX} = X - B = [a_1 + t.u_1 - b_1, a_2 + t.u_2 - b_2]$ musí byť kolmý na priamku
preto $\overrightarrow{BX}.\vec{u} = 0$ ➔ z lineárnej rovnice určiť t, pomocou t a rovníc priamky určiť konkrétny bod X
vzdialenosť bodu od priamky je d = $|\overrightarrow{BX}|$

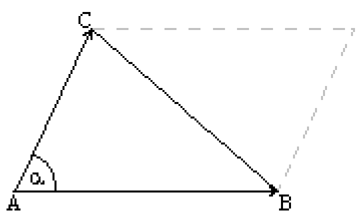
3; - nech M = $[m_1, m_2]$ je bod v rovine
rovnica priamky je: A.x + B.y + C = 0 a [A,B] ≠ [0,0]
potom $d = |M, p| = \frac{|A.m_1 + B.m_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok – je rovná vzdialenosti ľubovoľného bodu patriaceho jednej z priamok od druhej priamky

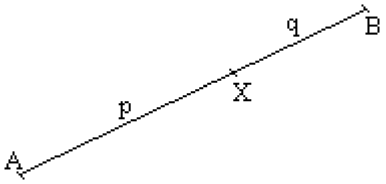
Obsah rovnobežníka: $S = |AB|.|AD|.\sin\alpha = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AD}|.\sin\alpha = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |(B - A) \times (D - A)|$

Obsah trojuholníka: $S = \frac{1}{2}|AB|.|AD|.\sin\alpha = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AD}|.\sin\alpha = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2}|(B - A) \times (D - A)|$





Rozdelenie úsečky v danom pomere: Bod X delí úsečku AB na úsečky AX a XB,



pričom platí: $\frac{|AX|}{|XB|} = p:q \Rightarrow |\overrightarrow{AX}| = \frac{p}{p+q}.|\overrightarrow{AB}|$

vektory majú rovnaký smer preto: $\overrightarrow{AX} = \frac{p}{p+q}.\overrightarrow{AB}$

$$X = A + \frac{p}{p+q}.\overrightarrow{AB}$$

Vektor – množina všetkých orientovaných úsečiek, ktoré majú rovnakú veľkosť a smer

Umiestnenie vektora – každá orientovaná úsečka, ktorá znázorňuje vektor

Súradnice vektora – súradnice koncového bodu takého umiestnenia vektora, ktorého začiatočný bod je v začiatku súradnicovej sústavy

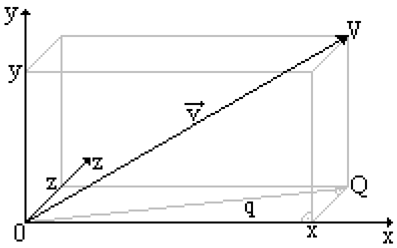
$A = [x_1, y_1, z_1]$; $B = [x_2, y_2, z_2]$

$\overrightarrow{AB} = B - A = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2] = [\Delta x, \Delta y, \Delta z]$

Násobenie vektora číslom: $k.\vec{u} = k.[u_1, u_2, u_3] = [k.u_1, k.u_2, k.u_3]$; smer sa zachováva

veľkosť: $|k.\vec{u}| = \sqrt{(k.u_1)^2 + (k.u_2)^2 + (k.u_3)^2} = \sqrt{k^2.(.u_1{}^2 + .u_2{}^2 + u_3{}^2)} = k.\sqrt{u_1{}^2 + .u_2{}^2 + u_3{}^2} = k.|\vec{u}|$

Veľkosť (dĺžka) vektora – veľkosť orientovanej úsečky, ktorá je umiestnením vektora



$\vec{v} = [x, y, z]$

Pytagorova veta: $\Delta 0xQ$: $q^2 = x^2 + z^2$

$\Delta 0QV$: $|\vec{v}|^2 = q^2 + y^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$|\vec{v}|^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Nulový vektor – vektor, ktorý nemá veľkosť ani smer; $\vec{0} = [0,0,0]$; $|\vec{0}| = 0$

Opačný vektor – k vektoru $\vec{u}$ je opačný vektor $\vec{v} = -\vec{u} = -1.\vec{u}$

- $\vec{u}$ a $\vec{v}$ majú navzájom opačný smer a rovnakú veľkosť

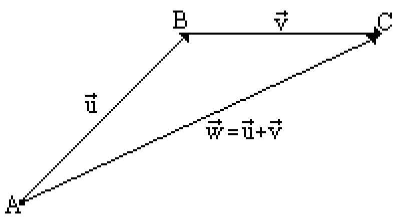
Súčet dvoch vektorov – ak zvolíme umiestnenie dvoch vektorov tak, že koncový bod jedného z nich je zároveň začiatočným bodom druhého, tak orientovaná úsečka, ktorej začiatočný bod je v začiatočnom bode umiestnenia prvého vektora a koncový bod v koncovom bode umiestnenia druhého vektora, je umiestnením súčtu týchto vektorov

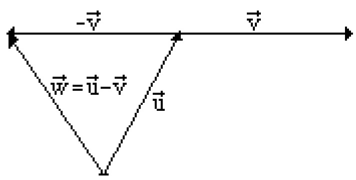
$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = C - B$; $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3] = B - A$

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = B - A + C - B = C - A = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3]$

Rozdiel dvoch vektorov: $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = [u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3]$





Lineárna kombinácia vektorov – lineárnou kombináciou vektorov $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ je každý vektor $\vec{v} = a_1 . \vec{u}_1 + a_2 . \vec{u}_2 + ... + a_n . \vec{u}_n$; pričom $a_1, a_2, ..., a_n \in R$

Skalárny súčin vektorov: $\vec{u} . \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\varphi$, kde $\varphi \in \langle 0°, 180° \rangle$; $\varphi = |\angle \vec{u}, \vec{v}|$

platí: $(k.\vec{u}).\vec{v} = |k.\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\varphi = k.|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\varphi = k.(\vec{u}.\vec{v})$; $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

- ak $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ a $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$, potom $\vec{u}.\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = [u_1, u_2, u_3].[v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3] = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Uhol dvoch vektorov:

$\varphi \in \langle 0°, 180° \rangle$ $\quad \vec{u}.\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\varphi$

$$\varphi = \arccos\frac{u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2).(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}} = \arccos\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

- kolmé vektory: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

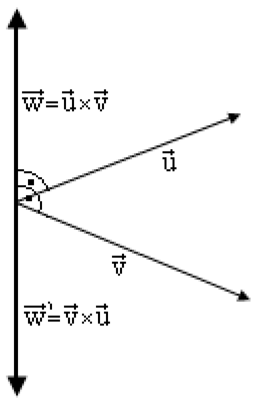
dôkaz: $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (|\vec{u}| = 0 \vee |\vec{v}| = 0 \vee \cos\varphi = 0)$; $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nie sú nulové vektory, preto

$$|\vec{u}|,|\vec{v}| > 0 \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k.\pi,\ k \in Z$$

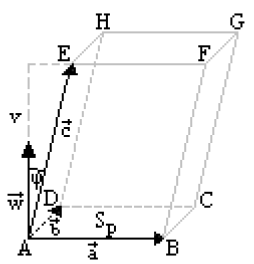
Vektorový súčin: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

- ak $\vec{u} = \vec{0}$ alebo $\vec{v} = \vec{0}$, potom $\vec{w} = \vec{0}$
- ak $\vec{u} \neq \vec{0}$ a $\vec{v} \neq \vec{0}$, potom:
  - $\vec{w} \perp \vec{u} \wedge \vec{w} \perp \vec{v}$
  - $|\vec{w}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\varphi$; $\varphi = |\angle \vec{u}, \vec{v}|$; **!!!** $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$ **!!!**
  - smer $\vec{w}$ určíme podľa pravidla pravej ruky
- ak $\vec{v} = k.\vec{u}$ ($k \in R$), potom $\vec{w} = \vec{0}$
- $\vec{w}' = \vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$
- ak $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ a $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$, potom :

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = [u_2.v_3 - u_3.v_2,\ u_3.v_1 - u_1.v_3,\ u_1.v_2 - u_2.v_1]$$



Objem rovnobežnostena:



$V = S_P.v$ (premiestnením častí sa z rovnobežnostena vytvorí kváder)

$S_P = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{w}|$

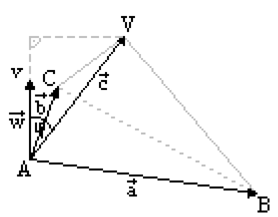
- z obrázka: $\cos\varphi = \frac{v}{|\vec{c}|} \Rightarrow v = |\vec{c}|.\cos\varphi$

$V = S_P.v = |\vec{w}|.|\vec{c}|.\cos\varphi = \vec{w}.\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c}$

- aby $V \geq 0$, tak:

$\mathbf{V = |(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c}|}$

Objem trojbokého ihlana:



$V = \frac{1}{3}.S_P.v$

$S_P = \frac{1}{2}.|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{w}|$

$\cos\varphi = \frac{v}{|\vec{c}|} \Rightarrow v = |\vec{c}|.\cos\varphi$

$V = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.|\vec{w}|.|\vec{c}|.\cos\varphi = \frac{1}{6}.\vec{w}.\vec{c}$

- aby $V \geq 0$, tak:

$\mathbf{V = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c}|}$

Vzájomná poloha bodu a priamky:

- priamka určená bodmi A,B
- bod C

$C \in \overleftrightarrow{AB} \Leftrightarrow k.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$; $k \in R$

- priamka určená bodom A a smerovým vektorom $\vec{u}$

$C \in p \Leftrightarrow k.\vec{u} = \overrightarrow{AC}$; $k \in R$

Rovnica kružnice: pre kružnicu platí: |SX| = r

nech je daný stred S = [m,n] a polomer r, potom $|SX| = \sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r$, kde X = [x,y] je bod kružnice => $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ - stredový tvar rovnice kružnice

po roznásobení dostaneme tvar: $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0$

potom: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ - všeobecná rovnica kružnice [A,B,C] Є R^3

– ak sú dané 3 body kružnice, určuje sa jej všeobecná rovnica riešením sústavy 3 rovníc s neznámymi A,B,C: A = – 2m, B = – 2n => $S = [m,n] = \left[\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right]$

$$C = m^2 + n^2 - r^2 \Rightarrow r^2 = m^2 + n^2 - C = \left(\frac{-A}{2}\right)^2 + \left(\frac{-B}{2}\right)^2 - C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{4} - C}$$

(Ne)Rovnica kruhu: |SX| ≤ r (r Є R^+), S = [m,n] => $(x-m)^2 + (y-n)^2 \le r^2$

$x^2 + y^2 + Ax + By + C \le 0$; [A,B,C] Є R^3

Vzájomná poloha útvarov – spoločné body útvarov X = [x,y] sú koreňmi sústavy rovníc a nerovníc

Dotyčnica ku kružnici: $(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$

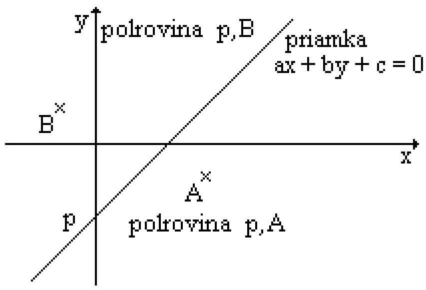
je dotyčnica ku kružnici k(S = [m,n], r) v jej bode T = [x_0, y_0] Є k

– vzdialenosť dotyčnice od stredu kružnice je rovná polomeru kružnice:

keď S = [m,n] a dotyčnica t: ax + by + c = 0, potom $|S,t| = r = \frac{|am + bn + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Polrovina: priamka: ax + by + c = 0

$$y = \frac{-ax - c}{b}$$



<u>**1;** polrovina p,A:</u>
∀ body pod priamkou p

$$y \le \frac{-ax - c}{b}$$

<u>**2;** polrovina p,B</u>
∀ body nad priamkou p

$$y \ge \frac{-ax - c}{b}$$

– nerovnice ax + by + c ≥ 0 a ax + by + c ≤ 0 popisujú dve navzýjom opačné polroviny, ktorých hraničná priamka je p: ax + by + c = 0

Karteziánsky súčin množín: A x B = {∀[x,y]; x Є A, y Є B}

3.3 Množiny bodov daných vlastností

Množinabodov s konštantnou vzdialenosťou:

a) od bodu – kružnica so stredom v tomto bode a polomerom rovným danej vzdialenosti
b) od priamky – dve rovnobežné priamky v danej vzdialenosti v navzájom opačných polrovinách
= hranica pásu = ekvidištanta
c) od kružnice – ekvidištanta kružnice – dve kružnice sústradné s danou kružnicou
– ak je vzdialenosť d > r, potom len jedna kružnica
– $r_1 = r + d$; $r_2 = r – d$

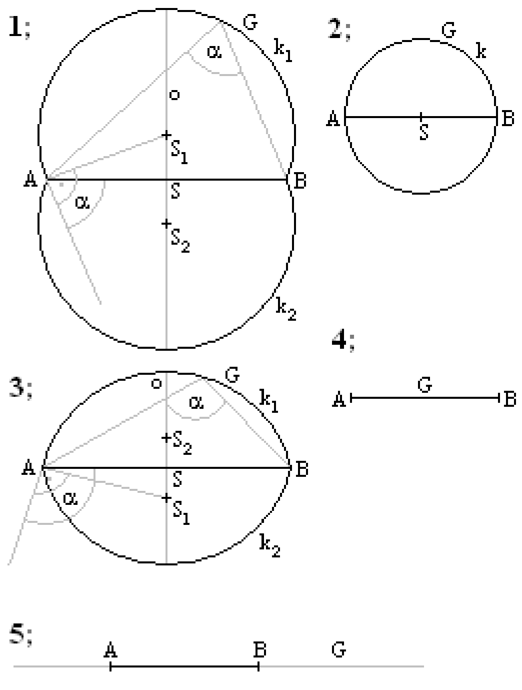
Množina bodov s rovnakou vzdialenosťou od:

a) dvoch bodov – os úsečky
b) dvoch rovnobežných priamok – os pásu
c) dvoch rôznobežných priamok – os uhla

Množina bodov, ktoré majú vzdialenosť:

a) od daného bodu menšiu ako r € R^+ – kruh bez hraničnej kružnice (polomer = r)
b) od daného bodu väčšiu ako r € R^+ – vonkajšia oblasť kružnice
c) od danej priamky menšiu ako d € R^+ – pás bez hraničných priamok
d) od danej priamky väčšiu ako d € R^+ – oblasť mimo pásu
e) od jedného bodu väčšiu ako od druhého bodu – |AX| > |BX| – polrovina určená osou úsečky AB a bodom B bez hraničnej priamky (osi úsečky)
f) od jednej priamky väčšiu ako od druhej priamky – |a,X| > |b,X| – polrovina určená osou pása a ľubovoľným bodom priamky b bez hraničnej priamky (osi pása),

Množina bodov, z ktorých vidieť danú úsečku pod daným uhlom:



Postup: **1; α € (0°,90°)**

S_1 leží na osi úsečky AB, $|\angle BAS_1| = 90° – \alpha$
kružnicový oblúk $k(S_1,r_1)$ má $r_1 = |AS_1| = |BS_1|$
k_2 je osovo súmerná s k_1 podľa osi AB
hľadaná množina: $G = (k_1 \cup k_2) – \{A,B\}$

2; α = 90°

Talesova kružnica – S je stred úsečky AB
$G = k(S, r = |AS| = |SB|) – \{A,B\}$

3; α € (90°,180°)

o je os AB, S_1 leží na osi o
$|\angle BAS_1| = \alpha - 90°$
kružnicový oblúk $k(S_1,r_1)$ má $r_1 = |AS_1| = |BS_1|$
k_2 je osovo súmerná s k_1 podľa osi AB
hľadaná množina: $G = (k_1 \cup k_2) – \{A,B\}$

4; α = 180°

$G = AB – \{A,B\}$

5; α = 0°

$G = \overleftrightarrow{AB} – AB$

Relácia – ľubovoľná podmnožina karteziánskeho súčinu
Zobrazenie – binárna relácia z množiny A do množiny B, kde každému prvku množiny A je priradený najviac jeden prvok množiny B
Zhodné zobrazenie – vzdialenosť dvoch vzorov sa rovná vzdialenosti ich obrazov
Involútorné zobrazenie – zobrazenie, ktoré keď priradí vzoru A obraz B, tak priradí vzoru B obraz A
Samodružný bod (útvar) – v danom zobrazení sa zobrazí sám do seba
Identita (identické zobrazenie) – zobrazenie, pri ktorom sú všetky body priestoru samodružné
Priama zhodnosť – orientácia bodov vzoru a obrazu je rovnaká
Nepriama zhodnosť – orientácia bodov vzoru a obrazu je opačná

Osová súmernosť – zhodné zobrazenie

– v rovine je daná os o (priamka), ktorá ∀ bodom: X Є o priradí X´= X

X∉ o priradí X´: XX´ ⊥ o, |o,X| = |o,X´|

– jednoznačne určená: a) osou

b) dvojicou vzor – obraz

– samodružné body: ∀ X Є o

– involútorná, nepriama zhodnosť

Stredová súmernosť – zhodné zobrazenie

– v rovine je daný bod S, ktorý ∀ bodom: X ≠ S priradí X´: S Є XX´, |XS| = |X´S|

– jednoznačne určená: a) stredom súmernosti

b) dvojicou vzor – obraz

– samodružné bod: stred súmernosti

– involútorná, priama zhodnosť

– priamka a jej obraz sú rovnobežné

Posunutie – zhodné zobrazenie

$\vec{v}$ je vektor posunutia

každému bodu X priradí $X´= X + \vec{v}$

– jednoznačne určené: a) vektorom posunutia

b) usporiadanou dvojicou [vzor, obraz]

– nemá samodružné body

– nie je involútorné, priama zhodnosť

– priamka a jej obraz sú rovnobežné

Otočenie – zhodné zobrazenie

je daný bod S a orientovaný uhol α

každému bodu X ≠ S priradí X´: |XS| = |X´S|; |XSX´| = α

– jednoznačne určené: stredom S a orientovaným uhlom α

– samodružný bod: S (stred otočenia)

– nie je involútorné, priama zhodnosť

Rovnoľahlosť – podobné zobrazenie

je daný bod S (stred rovnoľahlosti) a koeficient rovnoľahlosti k Є R – {0}

každému bodu X ≠ S priradí X´: S Є XX´, |SX´| = k.|SX|

– ak $k \in R^+$, X´ leží na polpriamke $\overrightarrow{SX}$; ak $k \in R^-$, X´ leží na opačnej polpriamke k $\overrightarrow{SX}$

– jednoznačne určená: stredom S a koeficientom k

– samodružný bod: S (stred rovnoľahlosti)

– nie je involútorné

– priamka a jej obraz sú rovnobežné

– každé dve úsečky s rôznou dĺžkou sú rovnoľahlé (dvoma spôsobmi)

– každé dve kružnice s rôznymi polomermi sú rovnoľahlé (dvoma spôsobmi)

– spoločné dotyčnice dvoch kružníc prechádzajú stredom rovnoľahlosti

Inverzné zobrazenie – ak nejaké zobrazenie priradilo množine A množinu B, potom k nemu inverzné zobrazenie priradí množine B množinu A

Súmerný útvar – útvar je osovo (stredovo) súmerný vtedy, keď sa vo vhodnej osovej (stredovej) súmernosti zobrazí sám do seba

Orientovaný uhol – má veľkosť aj smer

– smer – kladný – proti smeru hodinových ručičiek; α > 0

– záporný – v smere hodinových ručičiek; α < 0

Skladanie osových súmerností – každé zhodné zobrazenie je možné vytvoriť zložením najviac troch osových súmerností

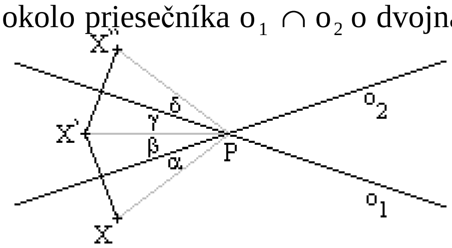
– skladaním dvoch osových súmerností vznikajú priame zhodnosti:

a) osi o_1 a o_2 sú rôznobežné – vzniká rotácia okolo priesečníka $o_1 \cap o_2$ o dvojnásobok uhla $\angle o_1, o_2$

– o_1 os XPX´, o_2 os X´PX´´ =>

=> $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$ => $\varphi = \alpha + \beta + \gamma + \delta =$

$= 2\beta + 2\gamma = 2|\angle o_1, o_2|$



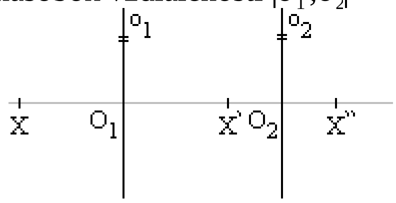
b) osi sú rovnobežné – vzniká posunutie o dvojnásobok vzdialenosti $|o_1, o_2|$

$|XX´| = |XO_1| + |X´O_1| + |X´O_2| + |X´´O_2|$

$|XO_1| = |X´O_1|$; $|X´O_2| = |X´´O_2|$

$|XX´´| = 2|X´O_1| + 2|X´O_2| = 2|O_1O_2| =$

$= 2|o_1, o_2|$



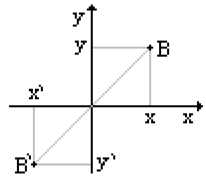
c) osi sú totožné – vzniká identita (osová súmernosť je involútorné zobrazenie)

Stredová súmernosť v ortonormálnej súradnicovej sústave:

a) podľa začiatku súradnicovej sústavy:

B = [x,y]

B´=[-x, -y]



b) podľa daného bodu: $S = [x_0, y_0]$

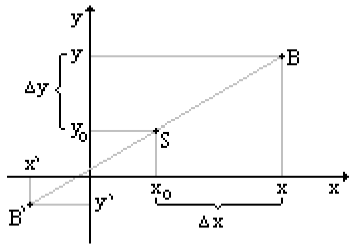
B = [x,y]

$\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = y - y_0$

$x´ = x_0 - \Delta x = x_0 - x + x_0 = 2x_0 - x$

$y´ = y_0 - \Delta y = y_0 - y + y_0 = 2y_0 - y$

$B´ = [2x_0 - x, 2y_0 - y]$

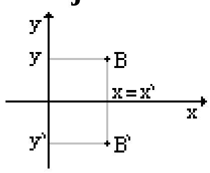


Osová súmernosť v ortonormálnej súradnicovej sústave:

a) podľa osi x

B = [x,y]

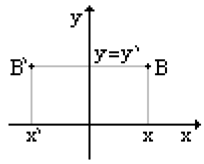
B´=[x, -y]



b) podľa osi y

B = [x,y]

B´=[-x, y]



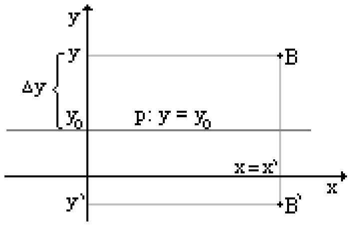
c) podľa priamky rovnobežnej s osou x

p: $y = y_0$; B = [x,y]

$\Delta y = y - y_0$

$y´ = y_0 - \Delta y = y_0 - y + y_0 = 2y_0 - y$

$B´ = [x, 2y_0 - y]$



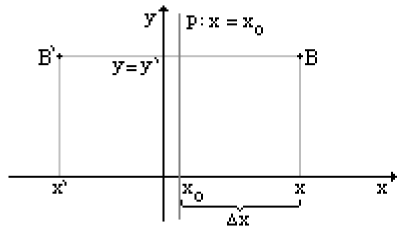
d) podľa priamky rovnobežnej s osou y

p: $x = x_0$; B = [x,y]

$\Delta x = x - x_0$

$x´ = x_0 - \Delta x = x_0 - x + x_0 = 2x_0 - x$

$B´ = [2x_0 - x, y]$

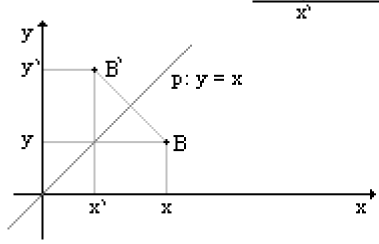


e) podľa priamky y = x

p: y = x

B = [x,y]

B´= [y,x]



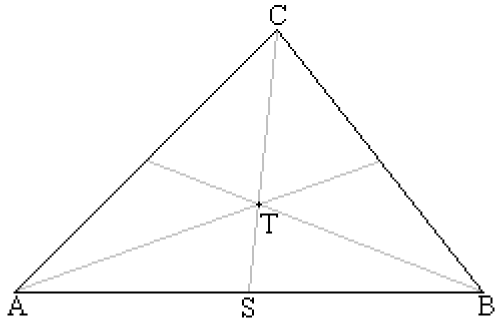
Posunutie v ortonormálnej súradnicovej sústave:

vektor posunutia: $\vec{v} = [\Delta x, \Delta y]$ B = [x,y]

$B' = [x', y'] = [x + \Delta x, y + \Delta y] = B + \vec{v}$

Stred úsečky: $S = A + \dfrac{\overrightarrow{AB}}{2} = A + \dfrac{B - A}{2} = \dfrac{2A + B - A}{2} \Rightarrow S = \dfrac{A + B}{2}$

Ťažisko trojuholníka: S je stred AB, CS je ťažnica



$S = \dfrac{A + B}{2}$

$|ST| = \dfrac{1}{2}|CT| = \dfrac{1}{3}|CS|$

$T = S + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SC} = S + \dfrac{C - S}{3} = \dfrac{A + B}{2} + \dfrac{C - \dfrac{A + B}{2}}{3} =$

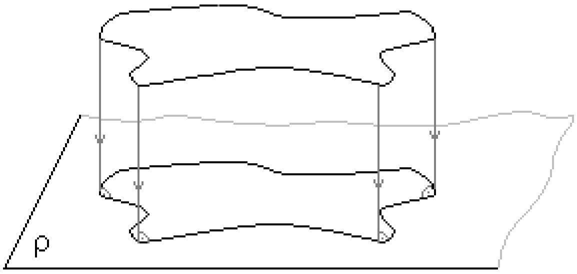
$= \dfrac{A + B}{2} + \dfrac{2C - A - B}{6} = \dfrac{3A + 3B + 2C - A - B}{6} = \dfrac{2(A + B + C)}{6} \Rightarrow T = \dfrac{A + B + C}{3}$

4. Stereometria

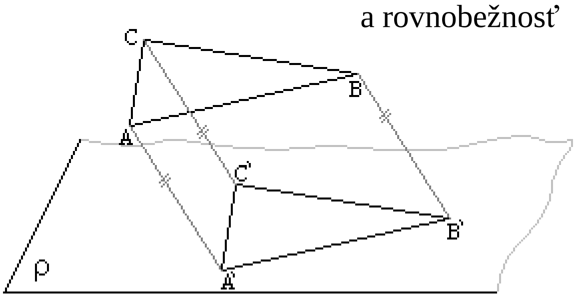
4.1 Základné spôsoby zobrazovania priestoru do roviny

Premietanie:

a) kolmé premietanie

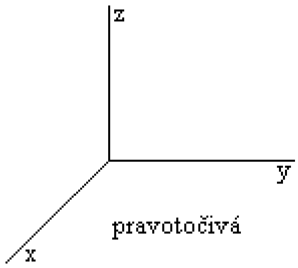


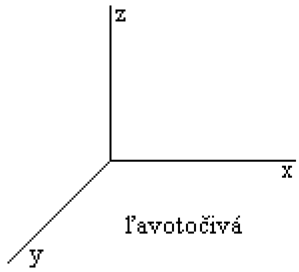
b) rovnobežné premietanie – zachováva deliaci pomer a rovnobežnosť



4.2 Súradnicová sústava v priestore, vektory, analytická metóda

Sústava súradníc v priestore:





Bod – má v priestore tri súradnice: x, y, z , podľa polohy vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy
Vzdialenosť dvoch bodov – (A,B) je dĺžka úsečky AB, ak A je rôzny od bodu B, alebo 0, ak A = B

– vzdialenosť bodov A a B označujeme $\varphi(A,B)$
– pre vzdialenosť platí:

1; pre každé dva body A a B priestoru platí: $\varphi(A,B) \geq 0$; $\varphi(A,B) = 0$ len ak A = B
2; pre každé dva body A a B priestoru platí: $\varphi(A,B) = \varphi(B,A)$
3; pre každé tri body A, B a C priestoru platí: $\varphi(A,B) \leq \varphi(A,C) + \varphi(B,C)$

Vektor – množina všetkých orientovaných úsečiek, ktoré majú rovnakú veľkosť a smer
Umiestnenie vektora – každá orientovaná úsečka, ktorá znázorňuje vektor
Súradnice vektora – súradnice koncového bodu takého umiestnenia vektora, ktorého začiatočný bod je v začiatku súradnicovej sústavy

$A = [x_1, y_1, z_1]$; $B = [x_2, y_2, z_2]$

$\overrightarrow{AB} = B - A = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2] = [\Delta x, \Delta y, \Delta z]$

Opačný vektor – k vektoru $\vec{u}$ je opačný vektor $\vec{v} = -\vec{u} = -1.\vec{u}$

– $\vec{u}$ a $\vec{v}$ majú navzájom opačný smer a rovnakú veľkosť

Nulový vektor – vektor, ktorý nemá veľkosť ani smer; $\vec{0} = [0,0,0]$; $|\vec{0}| = 0$

Súčet dvoch vektorov – ak zvolíme umiestnenie dvoch vektorov tak, že koncový bod jedného z nich je zároveň začiatočným bodom druhého, tak orientovaná úsečka, ktorej začiatočný bod je v začiatočnom bode umiestnenia prvého vektora a koncový bod v koncovom bode umiestnenia druhého vektora, je umiestnením súčtu týchto vektorov

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = C - B$; $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3] = B - A$

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = B - A + C - B = C - A = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3]$

Rozdiel dvoch vektorov: $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = [u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3]$

Násobenie vektora číslom: $k.\vec{u} = k.[u_1, u_2, u_3] = [k.u_1, k.u_2, k.u_3]$; smer sa zachováva

veľkosť: $|k.\vec{u}| = \sqrt{(k.u_1)^2 + (k.u_2)^2 + (k.u_3)^2} = \sqrt{k^2.(.u_1{}^2 + .u_2{}^2 + u_3{}^2)} = k.\sqrt{u_1{}^2 + .u_2{}^2 + u_3{}^2} = k.|\vec{u}|$

Smerový vektor priamky – nech body A a B patria priamke, potom orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ je umiestnením smerového vektora $\vec{u}$ priamky

Smerový vektor roviny – nech body A, B a C patria rovine, potom orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ sú umiestneniami smerových vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ roviny

Parametrická rovnica priamky: $X = A + k.\ \vec{u}$ - parametrická rovnica priamky v priestore

– A je ľubovoľný bod patriaci priamke, $\vec{u}$ je smerový vektor, k parameter

– $A = [x_0, y_0, z_0]$; $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$

$x = x_0 + k.u_1$

$y = y_0 + k.u_2$; $k \in R$

$z = z_0 + k.u_3$

Parametrická rovnica roviny – φ: $X = A + k.\vec{u} + l.\vec{v}$

– rovina môže byť určená: **a)** tromi bodmi neležiacimi na priamke
b) dvomi rôznobežkami, alebo dvomi rôznymi rovnobežkami
c) priamkou a bodom, ktorý jej nepatrí

$x = x_0 + k.u_1 + l.v_1$

$y = y_0 + k.u_2 + l.v_2$; $k,l \in R$

$z = z_0 + k.u_3 + l.v_3$

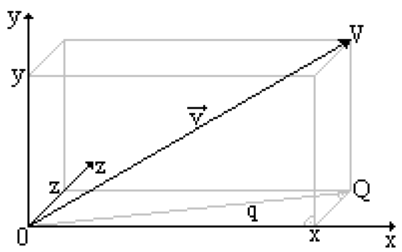
Skalárny súčin vektorov: $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\varphi$, kde $\varphi \in \langle 0°,180° \rangle$; $\varphi = |\angle \vec{u}, \vec{v}|$

platí: $(k.\vec{u}).\vec{v} = |k.\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\varphi = k.|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\varphi = k.(\vec{u}.\vec{v})$; $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

– ak $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ a $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$, potom $\vec{u}.\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$

– $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = [u_1, u_2, u_3].[v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3] = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Veľkosť (dĺžka) vektora – veľkosť orientovanej úsečky, ktorá je umiestnením vektora



$\vec{v} = [x,y,z]$

Pytagorova veta: $\Delta 0xQ$: $q^2 = x^2 + z^2$

$\Delta 0QV$: $|\vec{v}|^2 = q^2 + y^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$|\vec{v}|^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Uhol dvoch vektorov:

$\varphi \in \langle 0°,180° \rangle$ $\vec{u}.\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\varphi$

$$\varphi = \arccos\frac{u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}{\sqrt{(u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2).(v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2)}} = \text{ar}\cos\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

– kolmé vektory: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

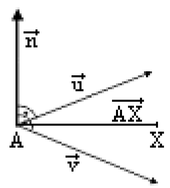
dôkaz: $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (|\vec{u}| = 0 \vee |\vec{v}| = 0 \vee \cos\varphi = 0)$; $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nie sú nulové vektory, preto

$|\vec{u}|,|\vec{v}| > 0 \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k.\pi$, $k \in Z$

Normálový vektor roviny: $\vec{n}$ – normálový vektor, kolmý na rovinu

$\vec{n} = \vec{u}\ x\ \vec{v}$

$\vec{n} = [a,b,c]$



Všeobecná rovnica roviny: $ax + by + cz + d = 0$

$\varphi = A + k.\vec{u} + l.\vec{v}$; $\vec{n} = \vec{u}\ x\ \vec{v} = [a,b,c]$ =>

=> φ: $ax + by + cz + d = 0$

4.3 Lineárne útvary v priestore - polohové úlohy

Priamka – je určená rovnicou $X = A + t.\vec{a}$; A bod patriaci priamke, $\vec{a}$ - nenulový vektor v priestore

– určená ako priesečnica dvoch rovín : $p = \varphi \cap \alpha$ => $p: X = P + m(\vec{n}_\varphi x\ \vec{n}_\alpha)$; $\{P\} = \varphi \cap \alpha$

Rovnobežné priamky – ležia v jednej rovine => $p||q \wedge p \in \varphi \wedge q \in \varphi$

– majú rovnaké smerové vektory: $\vec{u} = k.\vec{v}$

Rôznobežné priamky – ležia v jednej rovine => $p \nparallel q \wedge p \in \varphi \wedge q \in \varphi$

– majú práve jeden spoločný bod

Mimobežné priamky – neležia v jednej rovine => $p \nparallel q \wedge p \cap q = \emptyset$

Rovnobežnosť priamky a roviny – priamka q je rovnobežná s rovinou, ak existuje priamka $p \in \varphi$, ktorá je rovnobežná s priamkou q

– skalárny súčin normálového vektora roviny a smerového vektora priamky je rovný nule

Rôznobežnosť priamky a roviny – priamka má s rovinou spoločný práve jeden bod

– skalárny súčin normálového vektora roviny a smerového vektora priamky nie je rovný nule

Rovnobežné roviny – sú roviny, ktorých normálové vektory majú rovnaký smer ($\vec{n}_1 = k.\vec{n}_2$, $k \in R$)

Rôznobežné roviny – sú roviny, ktorých normálové vektory nemajú rovnaký smer, pričom ich prienikom je priamka zvaná priesečnica

Priesečnica dvoch rovín – $p = \varphi \cap \alpha$ => $p: X = P + m(\vec{n}_\varphi x\ \vec{n}_\alpha)$; $\{P\} = \varphi \cap \alpha$

Rez telesa rovinou – prienik telesa s rovinou

Súmernosť podľa bodu – znamená, že všetky body jedného útvaru sa v stredovej súmernosti podľa tohto bodu zobrazia do bodov druhého telesa

4.4 Lineárne útvary v priestore - metrické úlohy

Uhol dvoch priamok: $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \left|\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}\right|$, $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú smerové vektory priamok

Kolmosť priamok – priamky sú kolmé, ak sa skalárny súčin ich smerových vektorov rovná nule
Kolmosť rovín – roviny sú kolmé, ak sa skalárny súčin ich normálových vektorov rovná nule
Priamka kolmá k rovine – je priamka, ktorej smerový vektor je násobkom normálového vektora roviny
Uhol dvoch rovín – $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = |\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \left|\frac{\vec{n}_1.\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}\right|$, $\vec{n}_1$ a $\vec{n}_2$ sú normálové vektory rovín
Kolmý priemet bodu do roviny – je priesečník priamky kolmej na rovinu prechádzajúcej bodom s rovinou
Kolmý priemet priamky do roviny – je kolmý priemet všetkých bodov priamky do roviny
Vzdialenosť dvoch lineárnych útvarov:

- **1; dvoch bodov** – je veľkosť úsečky určenej týmito bodmi
- **2; bodu od roviny –** je vzdialenosť bodu a jeho kolmého priemetu do roviny
- **3; bodu od priamky** – je kolmá vzdialenosť bodu od priamky = najkratšia vzdialenosť
- **4; vzdialenosť rovnobežných priamok** – vzdialenosť ľub. bodu jednej priamky od druhej priamky
- **5; vzdialenosť mimobežných priamok** – je najkratšia vzdialenosť týchto priamok
- **6; priamky a roviny s ňou rovnobežnej –** je vzdialenosť ľub. bodu priamky od roviny
- **7; vzdialenosť rovnobežných rovín –** je vzdialenosť ľub. bodu jednej roviny od druhej roviny

Uhol priamky s rovinou – je uhol $\alpha = \left(90° - \cos^{-1}\left|\frac{\vec{n}.\vec{v}}{|\vec{n}|.|\vec{v}|}\right|\right)$

– je to 90° - β ; β je uhol medzi normálovým vektorom roviny a smerovým vektorom priamky
Súmernosť bodov podľa priamky – znamená, že všetky body jedného útvaru sa v osovej súmernosti podľa tejto priamky zobrazia do bodov druhého útvaru
Súmernosť bodov podľa roviny – znamená, že všetky body jedného útvaru sa v súmernosti podľa tejto roviny zobrazia do bodov druhého útvaru

4.5 Telesá

Teleso – je každá uzavretá oblasť v priestore
Mnohosten – je množina všetkých bodov priestoru ležiacich vnútri a na mnohostenovej ploche, ktorá je zjednotením n hraničných mnohouholníkov ($n \geq 4$) ležiacich v rôznych rovinách tak, že strana každého z nich je zároveň stranou iného mnohouholníka
Vrchol – je každý prienik aspoň troch hraničných mnohouholníkov mnohostena
Hrana – je každá spoločná strana dvoch hraničných mnohouholníkov mnohostena
Stena – je každý hraničný mnohouholník mnohostena
Hranol – má dve zhodné podstavy, ktoré ležia v dvoch rovnobežných rovinách; vzdialenosť podstáv je výška hranola, plášť hranola tvoria ostatné steny
– **kolmý hranol** má roviny stien kolmé na roviny podstavy
– **pravidelný hranol** je kolmý hranol s podstavou tvaru pravidelného n-uholníka
– **rovnobežnosten** je štvorboký hranol s podstavou tvaru rovnobežníka
Kocka – je kolmý hranol, ktorého všetky steny sú štvorce
Kváder – je kolmý rovnobežnosten, ktorého podstavou je pravouholník
Ihlan – je mnohosten, ktorého podstavou je mnohouholník a bočné steny sú trojuholníkové; spoločný bod všetkých bočných stien je vrchol ihlanu, vzdialenosť vrcholu od podstavy je výška
– **pravidelný ihlan** má podstavu tvaru pravidelného n-uholníka a ostatné steny rovnaké
Zrezaný ihlan – je časť ihlana nachádzajúca sa medzi podstavou a rovinou rovnobežnou s podstavou, ktorá prechádza ihlanom
Štvorsten – je mnohosten so 4 stranami tvaru trojuholníka
Pravidelný štvorsten – je ihlan, ktorého všetky steny majú tvar rovnakých rovnostranných trojuholníkov
Pravidelné mnohosteny – sú všetky mnohosteny, ktorých každá stena má tvar pravidelného n-uholníka
Guľa – je rotačné teleso vytvorené rotáciou kruhu okolo jeho priemeru
– **guľová plocha** je povrch gule, ktorý je tvorený všetkými bodmi vo vzdialenosti r od stredu gule
– **guľová vrstva** je časť gule nachádzajúca sa medzi dvomi rovnobežnými rovinami prechádzajúcimi guľou
– **guľový pás** je plášť guľovej vrstvy
– **guľový vrchlík** je prienik polpriestoru, ktorého hraničná rovina prechádza guľou s guľou
– **guľový výsek** je prienik gule rotačným kužeľom, ktorý má vrchol v strede gule a výšku väčšiu ako r
Valec – je rotačné teleso vytvorené rotáciou obdĺžnika okolo jednej jeho hrany, ktorá je zároveň osou aj výškou valca, dĺžka druhej strany je polomerom valca
Kužeľ – je rotačné teleso, ktoré vznikne rotáciou pravouhlého trojuholníka okolo odvesny, ktorá je výškou kužeľa, druhá odvesna je polomerom kužeľa
Zrezaný kužeľ – je časť kužeľa nachádzajúca sa medzi podstavou a rovinou rovnobežnou s podstavou, ktorá prechádza kužeľom

5. Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika

5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť

Permutácie bez opakovania – Permutáciou (poradím) z *n*-prvkovej množiny M, alebo *n*-člennou permutáciou bez opakovania nazývame každú usporiadanú *n*-ticu navzájom rôznych prvkov, vytvorenú z prvkov množiny M

– počet ∀ permutácií z *n* prvkov bez opakovania:

$$P(n) = 1.2.3.....n = n!$$

Permutácie s opakovaním – *n*-člennou permutáciou z *p*-prvkovej množiny M = $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ s opakovaním prvku a_1 práve k_1-krát, prvku a_2 práve k_2-krát, ..., prvku a_p práve k_p-krát nazývame každú takú usporiadanú *n*-ticu vytvorenú zo všetkých *p* (p ≤ n) prvkov množiny M, že sa v tejto usporiadanej *n*-tici prvok a_1 vyskytuje práve k_1-krát, prvok a_2 práve k_2-krát, ..., prvok a_p práve k_p-krát ($k_1 + k_2 + ... + k_p = n$)

– počet ∀ *n*-členných permutácií z *p*-prvkovej množiny $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ s opakovaním :

$$P'_{k_1,k_2,...,k_p}(n) = \binom{n}{k_1, k_2, ..., k_p} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_p!}$$

– kde symbol $\binom{n}{k_1, k_2, ..., k_p}$ sa nazýva polynomický koeficient

Variácie bez opakovania – variáciou *k*-tej triedy z n-prvkovej množiny, alebo variáciou *k*-tej triedy z *n* prvkov bez opakovania nazývame každú usporiadanú *k*-ticu navzájom rôznych prvkov, vytvorenú z *n*-prvkovej množiny, tj. každý prvok z daných *n* prvkov sa v jednej variácií vyskytuje najviac raz

– počet ∀ variácií *k*-tej triedy z *n*-prvkovej množiny bez opakovania:

$$V_k(n) = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k}k!$$

Variácie s opakovaním – variáciou *k*-tej triedy z *n*-prvkovej množiny s opakovaním nazývame každú usporiadanú *k*-ticu vytvorenú z prvkov množiny M tak, že v tejto usporiadanej *k*-tici sa každý prvok z prvkov množiny M môže vyskytovať až *k*-krát

– počet ∀ variácií *k*-tej triedy z *n* prvkov s opakovaním:

$$V'_k(n) = n^k$$

Kombinácie bez opakovania – kombináciou *k*-tej triedy z *n* prvkovej množiny, alebo kombináciou *k*-tej triedy z *n* prvkov bez opakovania nazývame každú *k*-prvkovú podmnožinu *n*-prvkovej množiny, tj. pri kombinácii bez opakovania nezáleží na poradí prvkov a každý prvok z daných *n* prvkov sa v jednej kombinácii vyskytuje najvac raz

– počet ∀ kombinácií *k*-tej triedy z *n* prvkov bez opakovania:

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n(n\;\;1)...(n-k+1)}{1.2.....k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{V_k(n)}{P(k)} \qquad n \geq k$$

Kombinácie s opakovaním – kombináciou *k*-tej triedy z *n*-prvkovej množiny M s opakovaním nazývame každú skupinu *k*-prvkov vytvorenú z prvkov množiny M tak, že v tejto skupine sa každý prvok môže vyskytovať až *k*-krát

– počet ∀ kombinácií *k*-tej triedy z *n* prvkov s opakovaním:

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Faktoriál – faktoriálom čísla *n* nazývame funkciu F na množine všetkých nezáporných celých čísel, definovanú takto:

$F(0) = 1$

$F(n) = n \,.\, F(n-1) \qquad n \in N_0$

– namiesto F(n) píšeme n!

Kombinačné číslo – pre nezáporné celé čísla *k*, *n* sa tzv. kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ definuje takto:

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \begin{pmatrix} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad 0 \le k \le n$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Pascalov trojuholník – obsahuje koeficienty binomického rozvoja $(a+b)^n$:

n = 0	1
n = 1	1 1
n = 2	1 2 1
n = 3	1 3 3 1
n = 4	1 4 6 4 1
n = 5	1 5 10 10 5 1

Binomická veta – $(a+b)^n = \binom{n}{0}.a^n.b^0 + \binom{n}{1}.a^{n-1}.b^1 + \binom{n}{2}.a^{n-2}.b^2 + ... + \binom{n}{n-1}.a^1.b^{n-1} + \binom{n}{n}.a^0.b^n$

Pravdepodobnosť – každému javu E, tj. každému možnému výsledku pokusu, je priradené číslo *P* = P(E), zvané pravdepodobnosť javu E, pre ktoré platí:

$0 \le P(E) \le 1$

– istý jav ➔ P(E) = 1

– nemožný jav ➔ P(E) = 0

$P(E) = \frac{m}{n} \qquad (m,n \in N)$

– pri pokuse je pre jav E z *n* možných výskytov *m* výskytov priaznivých

Doplnková pravdepodobnosť A′ – P(A′) = 1 – P(A) ; P(A) + P(A′) = 1

Geometrická pravdepodobnosť javu A – ak je *m(A)* miera (veľkosť) množiny A, *m(Ω)* miera množiny Ω a $A \subset \Omega$, tak: $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$

Náhodný jav – jav s pravdepodobnosťou P, pričom 0 < P < 1

Nezávislé javy – dva javy sa nazývajú vzájomne nezávislé, práve vtedy keď výsledok jedného z nich nemá vplyv na výsledok druhého javu

– pri *n* nezávislých pokusoch, pričom pri každom pokuse nastane práve jeden z *k* nezlúčiteľných javov E_1, E_2, ..., E_k s pravdepodobnosťami $P_1 = P(E_1)$, $P_2 = P(E_2)$, ..., $P_k = P(E_k)$, a ak označíme $P_n(m_1, m_2, ..., m_k)$ ako pravdepodobnosť, že pri *n* pokusoch jav E_1 nastane m_1-krát, jav E_2 nastane m_2-krát, ..., jav E_k m_k-krát ($m_1 + m_2 + ... + m_k = n$), tak platí:

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1!m_2!...m_k!} P_1^{m_1} P_2^{m_2} ... P_k^{m_k}$$

5.2 Štatistika

Základný súbor – konečná neprázdna množina M
Modus – najčastejšie sa vyskytujúca hodnota medzi $x_1, x_2, \dots, x_k$; hodnota s najväčšou početnosťou n_i
Medián – prostredný člen medzi hodnotami x_i , ak sú usporiadané podľa veľkosti

Aritmetický priemer – $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}$

Geometrický priemer – $\bar{x} = \sqrt[k]{x_1 . x_2 ..... x_k}$

Harmonický priemer – $\bar{x} = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dots + \dfrac{1}{x_n}} = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i}}$

Smerodajná odchýlka – $s = \sqrt{\dfrac{1}{n} . \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$

Rozptyl – $s^2 = \dfrac{1}{n} . \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$